А. С. Ольчак
С. Е. Муравьёв

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА

10–11 КЛАССЫ

ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА

А. С. Ольчак
С. Е. Муравьев

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

10—11 классы

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

Москва
«Просвещение»
2021

УДК 373.167.1:531/534+531/534(075.3)
ББК 22.2я721
О-56

12+

Серия «Профильная школа» основана в 2019 году

Ольчак, Андрей Станиславович.

О-56 Прикладная механика : 10—11-е классы : учебное пособие для общеобразовательных организаций : [издание в pdf-формате] / А. С. Ольчак, С. Е. Муравьев. — Москва : Просвещение, 2021. — 192 с. — (Профильная школа).

ISBN 978-5-09-084743-8 — Текст : электронный.

Пособие представляет собой элективный курс, разработанный для факультативного изучения и предназначенный для учащихся старших классов школ и колледжей.

В книге рассказывается об устройствах и механизмах, применяемых в технике, о законах, на основе которых эти устройства работают. Она содержит большое количество разобранных технических задач — и расчётных, и экспериментальных. Представлен широкий спектр учебно-познавательных возможностей, в том числе увлекательные эксперименты, практические работы, задачи для самостоятельной работы, что помогает ученикам лучше усвоить теоретический материал, раскрывающий красоту механических явлений.

Пособие может быть использовано при реализации учебного плана технологического (инженерного), естественно-научного, универсального и других профилей как на уровне общего образования, так и в рамках внеурочной деятельности.

УДК 373.167.1:531/534+531/534(075.3)
ББК 22.2я721

ISBN 978-5-09-084743-8

ВВЕДЕНИЕ
Что такое прикладная механика

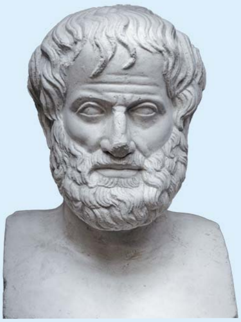
Курс, к изучению которого вы приступаете, называется «Прикладная механика». Речь в нём пойдёт об устройствах и механизмах, применяемых в технике, и законах, на основе которых эти устройства работают.

В школьном курсе физики вы уже познакомились с законами механики. Помните? Бруски, скользящие по наклонным плоскостям, грузы на пружинках, материальные точки, движущиеся по прямым, параболам и окружностям, и т. п.… Возникает естественный вопрос: какое отношение всё это имеет к реальной жизни, а тем более к современной технике?

Курс физики часто воспринимается школьниками как некий набор формул, которые надо выучить для того, чтобы решить стандартные задачки и получить достойные баллы на ЕГЭ.

Неправильно! Физика — это наука о природе, о материи, о движении, обо всём вокруг нас. Само слово «физика» происходит от греческого φύσις — природа. Впервые это слово появилось в трудах греческого мыслителя Аристотеля как название общего свода правил и высказываний об устройстве материального мира. Энциклопедия даёт такое определение: «Физика — наука, изучающая простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явлений природы, свойства и строение материи и законы её движения. Понятия и законы физики лежат в основе всего естествознания», т. е. физика — фундаментальная наука [1]. Весьма общее определение. Ответы на вопрос, чем занимаются другие науки, выглядят куда конкретнее. Например, химия занимается превращениями веществ друг в друга. А биология — живыми организмами. А медицина — тоже живыми, но не вполне здоровыми организмами. И т. д. Всё в одну строчку, что, конечно, никак не умаляет огромной важности этих наук. Но физика — это наука обо всём, что происходит в природе и вокруг нас! Ведь в основе химических превращений — взаимодействие молекул, в основе жизни — многообразные превращения энергии, веществ и снова взаимодействие молекул, в основе многих болезней — нарушение условий протекания тех или иных процессов в живых организмах.

Механика — это часть физики, занимающаяся движением. Где окажется то или иное тело в такой-то момент времени? Какую будет иметь скорость? Как будет взаимодействовать с другими телами? На все эти вопросы отвечает механика. А механика прикладная — это приложение фундаментальной механики к технике, приборам и устройствам, придуманным человеком для удовлетворения своих потребностей. Как шарнирное соединение деталей передаёт движение? Как блок передаёт и увеличивает силу? Можно ли в тормозной системе автомобиля увеличить давление, чтобы более эффективно тормозить?



Аристотель (384—322 гг. до н. э.) — великий древнегреческий философ, писатель, учёный-энциклопедист.

Аристотель является основоположником нескольких наук — физики, астрономии и космологии, биологии, психологии, политологии, социологии, философии, логики, науки о государстве и обществе. Он создал первую философскую систему, разработал аппарат и категории философии, которые используются до наших дней. Аристотель был первым мыслителем, создавшим всестороннюю систему знаний, охватившую все сферы человеческой деятельности. И несмотря на то что многие утверждения Аристотеля не выдержали проверку временем, его философия, физика, теория государства и общества оказывали огромное влияние на развитие человеческой мысли в течение более чем двух тысяч лет. Поэтому можно сказать, что труды Аристотеля лежат в основании всей современной науки.

Поскольку любое явление природы и тем более работа технических устройств являются весьма сложными, нам приходится рассматривать упрощённые модели явлений и устройств, отбрасывая всё, что слабо влияет на основные принципы их работы, и учитывать только самое существенное. Поэтому и возникают в «школьной» физике математический маятник, точечные грузы на наклонной плоскости и материальные точки вместо реальных тел.

В результате у школьников складывается ощущение, что реальная жизнь и тем более работа современной техники настолько далеки от «школьной» механики, что эта «школьная» механика совсем не о том. И вот этот разрыв, существующий в головах многих современных школьников, — разрыв между «школьной» физикой и жизнью, между «школьной» механикой и современной техникой, между «школьной» механикой и принципами работы окружающих нас машин и механизмов — мы постараемся если не ликвидировать, то хотя бы немного сократить. Нужно только посмотреть на механику под другим — практическим — углом, порешать задачи из жизни, попробовать сделать руками модели устройств и механизмов, работающих на основе «школьной» физики.

Этому и посвящена книга, которую вы держите в руках. Она содержит большое количество технических задач — и расчётных, и экспериментальных. Какие-то из них разобраны, другие оставлены вам для самостоятельного решения. Мы старались подобрать интересные и поучительные задачи, часть которых мы взяли из заданий Инженерной олимпиады школьников, проводимой совместно несколькими техническими вузами.

ГЛАВА

1

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Что может и чего не может механика

1.1. Вспоминаем «школьную» механику

Школьный курс механики состоит из нескольких крупных разделов, рассматривающих движение или покой тел с несколько разных сторон: кинематики, динамики, статики, законов сохранения.

Кинематика описывает движение без рассмотрения его причин, вводит величины, количественно характеризующие движение (скорость, ускорение, перемещение). Важное место в кинематике занимает исследование равномерного и равноускоренного движения, относительности движения, сложения скоростей.

В рамках динамики решается **основная задача механики** по определению зависимости координат тел от времени по заданным взаимодействиям и начальным условиям. Теоретической основой динамики являются законы Ньютона, которые и дают нам алгоритм ответа на главный вопрос механики через решение уравнений движения.

Важным свойством уравнений движения является существование таких комбинаций их решений, которые не меняются (сохраняются) в процессе движения тел. Утверждения о сохранении тех или иных величин в механике называются законами сохранения. Законы сохранения значительно упрощают решение уравнений движения. В школьном курсе механики рассматриваются законы сохранения импульса и энергии.

Отдельно в школьном курсе выделяют **статику** как раздел механики, изучающий **равновесие тел**. В статике формулируются условия, при выполнении которых тела находятся в равновесии, причём не только точечные, но и протяжённые.

Рассмотрим основные определения и законы кинематики, динамики, статики, а также законы сохранения механической энергии и импульса. В этом кратком повторении школьной программы мы дадим только те определения и законы, которые нам потребуются в дальнейшем. Для более детального повторения отсылаем читателя к учебнику физики[1].

1.2. Кинематика

Важнейшими понятиями кинематики являются радиус-вектор, перемещение, скорость и ускорение. Положение тела можно описать радиус-вектором,

[1] См., например: Мякишев Г. Я. Физика. 10 кл.: учеб. для общеобразоват. организаций / [Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, Н. Н. Сотский]; под ред. Н. А. Парфентьевой. — М.: Просвещение, 2018.

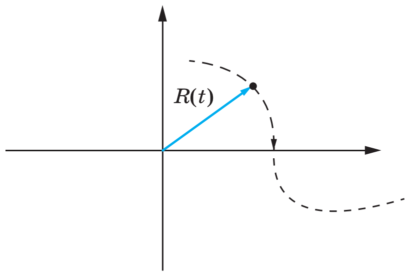


Рис. 1.1

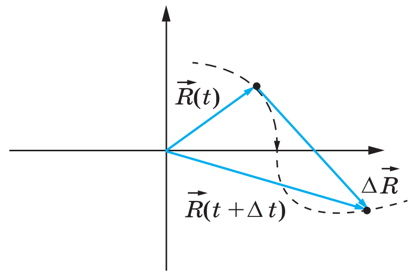


Рис. 1.2

начало которого находится в начале координат, конец — в той точке, в которой находится тело. На рисунке 1.1 показаны: **траектория** тела, положение тела в какой-то момент времени t (точка), **радиус-вектор** $\vec{R}(t)$ тела относительно представленной на рисунке системы координат.

Перемещением тела за какой-то промежуток времени называется вектор, связывающий положение тела в начале и в конце этого интервала. Как следует из рисунка 1.2, вектор перемещения $\vec{r}$ за интервал времени Δt представляет собой изменение радиус-вектора тела за этот интервал времени:

$$\vec{r} = \Delta\vec{R} = \vec{R}(t+\Delta t) - \vec{R}(t).$$

Путь s, пройденный телом за некоторый интервал времени, — это длина участка траектории, заключённого между положениями тела в начале и в конце указанного интервала времени. Путь является неотрицательной неубывающей функцией времени.

Для количественной характеристики быстроты перемещения тела вводится понятие **скорости**. В случае равномерного движения скорость $\vec{v}$ определяется как отношение произвольного перемещения $\Delta\vec{R}$ тела к тому интервалу времени Δt, за который это перемещение было совершено:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{R}}{\Delta t}. \qquad (1.1)$$

Для прямолинейного движения в одном направлении, когда модуль вектора перемещения тела и пройденный путь совпадают $\left(\left|\Delta\vec{R}\right| = s\right)$, скорость определяется как отношение пройденного пути к интервалу времени, за который этот путь пройден:

$$v = \frac{\left|\Delta\vec{R}\right|}{\Delta t} = \frac{s}{\Delta t}. \qquad (1.2)$$

Из этих определений следует, что скорость представляет собой путь, проходимый телом за единицу времени, а направление скорости совпадает с направлением перемещения тела.

Важное следствие из определений (1.1), (1.2) скорости заключается в том, что

для равномерного прямолинейного движения эти соотношения дают одинаковый результат для любых перемещений (или пройденных путей) и соответствующих им интервалов времени.

Действительно, если тело, двигаясь равномерно, прошло расстояние s за время Δt, то на прохождение любой части этого пути $s_1 = s/n$ оно затратит такую же часть полного времени: $\Delta t_1 = \Delta t/n$. Поэтому отношение $s_1/\Delta t_1$ будет таким же, как и отношение $s/\Delta t$, и тоже будет определять скорость тела. А это значит, что соотношения (1.1), (1.2) можно применять к любым этапам движения тела, причём применять для определения любой входящей в эти формулы величины при известных двух других. Рассмотрим два примера.

Задача 1.1. Между городами A и B курсируют грузовой и легковой автомобили. Скорость грузового автомобиля составляет 2/3 от скорости легкового. Грузовой автомобиль выезжает из города A, легковой через некоторое время выезжает из города B. Ровно посередине отрезка AB они встречаются. В этот момент они разворачиваются и едут назад. Доехав до городов, из которых они выехали, они снова разворачиваются и едут навстречу друг другу. Затем опять встречаются, разворачиваются и т. д. На каком расстоянии от города A произойдёт 2018-я встреча грузового и легкового автомобилей, если они ездят с постоянными скоростями, а разворачиваются мгновенно? Расстояние между городами равно L.

Решение. Поскольку сумма расстояний, пройденных автомобилями от одной встречи до другой, равна удвоенному расстоянию между городами, то между двумя последовательными встречами легкового и грузового автомобилей проходят одинаковые интервалы времени, равные

$$\Delta t = \frac{2L}{v_1 + v_2} = \frac{4L}{5v_1},$$

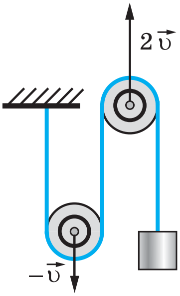
где v_1 и $v_2 = 3v_1/2$ — скорости грузового и легкового автомобилей соответственно. Поэтому до второй встречи грузовик пройдёт расстояние

$$s_1 = v_1 \Delta t = \frac{4L}{5},$$

и вторая встреча автомобилей произойдёт на расстоянии

$$L_1 = s_1 - \frac{L}{2} = \frac{4L}{5} - \frac{L}{2} = \frac{3L}{10}$$

от города A, третья — посередине между городами, четвёртая — снова на расстоянии $3L/10$, пятая — снова посередине и т. д. Таким образом, 2018-я встреча автомобилей произойдёт на расстоянии $3L/10$ от города A.



Задача 1.2. В системе, изображённой на рисунке, левый блок движется вниз со скоростью v, правый — вверх со скоростью $2v$. В каком направлении и с какой скоростью движется груз?

Решение. Очевидно, что груз будет перемещаться, поскольку блоки движутся и вытягивают верёвку. Для определения скорости груза свяжем перемещения блоков с перемещением груза. За некоторый интервал времени Δt левый блок переместится вниз на расстояние $v\Delta t$, правый — вверх на расстояние $2v\Delta t$. Тогда длина верёвки слева от левого блока увеличится на $v\Delta t$, длина верёвки между блоками увеличится на $2v\Delta t + v\Delta t = 3v\Delta t$. Поэтому отрезок верёвки справа от правого блока уменьшится на $4v\Delta t$ и, кроме того, точка правого блока, от которой этот отрезок начинается, поднимется на $2v\Delta t$. Следовательно, перемещение груза за рассматриваемый интервал времени Δt будет равно $\Delta x_{\text{гр}} = 6v\Delta t$. Отсюда заключаем, что скорость груза направлена вверх и равна

$$v_{\text{гр}} = \frac{\Delta x_{\text{гр}}}{\Delta t} = 6v\,.$$

Равномерное движение редко встречается в природе, чаще нам приходится иметь дело с движением, в котором скорость тела изменяется с течением времени, причём как по модулю, так и по направлению. Для характеристики быстроты изменения скорости тела вводят физическую величину, которая называется **ускорением**.

Среднее ускорение тела за некоторый интервал времени Δt определяется как

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \qquad (1.3)$$

где $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_1$ — векторы скорости тела в конце и начале интервала времени Δt, $\Delta\vec{v}$ — вектор изменения скорости тела за интервал времени Δt.

Из определения (1.3) следует, что вектор среднего ускорения тела направлен так же, как и вектор изменения скорости $\Delta\vec{v}$, а его значение характеризует среднюю быстроту изменения скорости: если скорость тела увеличилась с 1 м/с до 11 м/с за 10 с, то в среднем в течение интервала времени Δt скорость тела увеличивалась на 1 м/с за каждую секунду. В предельном случае $\Delta t \to 0$ формула (1.3) определяет мгновенное ускорение тела.

Движение тела называется **равноускоренным**, если вектор ускорения тела не меняется в процессе движения. С равноускоренным движением мы сталкиваемся, например, когда рассматриваем движение тела вблизи поверхности земли (в пренебрежении сопротивлением воздуха) или любое другое движение под действием постоянной силы. В первом случае ускорение тела направлено вертикально вниз и равно ускорению свободного падения. Во втором — может быть найдено из второго закона Ньютона (см. ниже).

В случае равноускоренного движения радиус-вектор тела в произвольной системе координат и его скорость следующим образом зависят от времени[1]:

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}\, t^2}{2}, \qquad (1.4)$$
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t,$$

где $\vec{R}(t)$ и $\vec{v}(t)$ — радиус-вектор и скорость тела как функции времени t, $\vec{a}$ — ускорение. Время t в уравнениях (1.4) отсчитывается от некоторого момента $t = 0$, который мы называем начальным и которому соответствуют $\vec{R}_0$ и $\vec{v}_0$ — радиус-вектор и скорость тела в начальный момент (при $t = 0$). Начальный момент для уравнений (1.4) может быть выбран любым. При этом $\vec{R}_0$ и $\vec{v}_0$ — радиус-вектор и скорость тела в тот момент времени, который принят за начальный.

Галилео Галилей (1564—1642) — великий итальянский физик, один из создателей современной физики. Заложил основы механики, выдвинул идею об относительности движения, установил законы инерции, свободного падения, сложения движений. Сформулировал принцип возможных перемещений, являющийся одной из основ прикладной механики, и рассмотрел на основе этого принципа работу простых механизмов Архимеда.

Сконструировал первый телескоп с 30-кратным увеличением и с его помощью открыл горы на Луне, спутники Юпитера, фазы Венеры, пятна на Солнце. Активно защищал гелиоцентрическую систему мира, за что был подвергнут суду инквизиции. Этот суд в значительной степени был спровоцирован самим Галилеем. В попытке убедить церковь, что гелиоцентризм совместим с христианством, Галилей написал книгу «Диалог о двух важнейших системах мира» — обсуждение разных точек зрения на эту проблему. Книга построена как диалог сторонников гео- и гелиоцентрической систем устройства Вселенной, а также нейтрального участника. Однако, несмотря на попытку сделать изложение нейтральным, аргументы говорили сами за себя, а сторонника геоцентризма Галилей не без издёвки назвал Симпличио (в переводе с итал. — Простак), вложив в его уста аргументы папы Урбана VIII (с которым был знаком лично).

[1] Уравнения (1.4) можно вывести из определения ускорения. Первым уравнения (1.4) получил Галилей, предположив, что скорость возрастает пропорционально времени, а путь — квадрату времени движения.

Прочитав книгу (с комментариями «добрых католиков»!), папа в 1633 г. инспирировал процесс против Галилея. А это было серьёзно! Ведь совсем недавно, в 1600 г., в Риме на Площади цветов по приговору инквизиции был казнён Джордано Бруно... Эта площадь сохранилась, там и сейчас продают цветы, и там стоит памятник Дж. Бруно — «от столетия, которое он предвидел», на том месте, где горел костёр. После оглашения приговора Галилей, стоя на коленях, зачитал текст отречения от учения Коперника.

Уравнения (1.4) полностью описывают движение тела и потому позволяют найти любые характеристики равноускоренного движения. Рассмотрим пример.

Задача 1.3. Тело, двигаясь с постоянным ускорением из состояния покоя, прошло расстояние s за время τ. Какую скорость имело тело в тот момент, когда оно прошло n-ю часть этого расстояния (s/n)?

Решение. Поместим начало координат в начальную точку O, ось OX направим вдоль движения тела. Тогда законы движения (1.4) в проекции на ось OX с учётом нулевой начальной скорости тела принимают вид

$$x(t) = \frac{at^2}{2},$$
$$v(t) = at,$$

где a — ускорение тела. Применяя законы движения к моменту τ, получим

$$s = \frac{a\tau^2}{2},$$
$$v = a\tau.$$

Отсюда находим:

$$a = \frac{2s}{\tau^2}.$$

Применяя теперь закон равноускоренного движения к моменту времени, когда тело прошло n-ю часть расстояния s, получим

$$v_1^2 = 2a\frac{s}{n} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{2s}{\sqrt{n}\tau}.$$

1.3. Законы Ньютона и решение основной задачи механики

Выяснением причин движения тел занимается **динамика**, основанная на трёх законах Ньютона. Дадим их краткий обзор.

Со времён Аристотеля существовало устойчивое заблуждение, что для поддержания движения тела необходимо воздействие на него извне, или, другими словами, необходимо действие силы. Однако это утверждение, основанное, казалось бы, на повседневном опыте, является тем не менее неверным: ведь в нашем повседневном опыте мы никогда не можем исключить трение или другие силы, оказывающие сопротивление движению.

И только во времена Галилея и Ньютона физики поняли, что если исключить все воздействия на тело, в том числе и трение, то тело будет двигаться с постоянной скоростью и никогда не остановится. В этом и заключается **первый закон Ньютона**.

Такое движение, которое происходит в отсутствие сил, называется движением по инерции, а системы отсчёта, в которых наблюдается движение по инерции, — **инерциальными.**

Здесь необходимы два комментария. Во-первых, не все системы отсчёта являются инерциальными. Действительно, если в отсутствие внешних воздействий тело движется с постоянной скоростью относительно некоторой системы отсчёта, то относительно системы отсчёта, которая движется относительно первой ускоренно, и тело будет двигаться с ускорением. Поэтому в такой системе отсчёта скорость тела меняется и без действия на него сил. Как показывает опыт, систему отсчёта, связанную с Землёй, с определённой точностью можно считать инерциальной.

Во-вторых, существует множество инерциальных систем отсчёта. Действительно, любая система отсчёта, которая движется относительно инерциальной системы с постоянной скоростью, также является инерциальной. Поэтому для любого тела, совершающего движение по инерции, можно найти такую инерциальную систему, в которой оно покоится. А это значит, что движение по инерции является относительным: в одной системе отсчёта тело движется, в другой покоится, и, следовательно, вопрос о причинах такого движения является бессмысленным. Имеет смысл ставить вопрос о причинах изменения движения, а такими причинами являются силы.

Итак, из первого закона Ньютона следует, что

ускорения, которые имеют тела в инерциальных системах отсчёта, возникают благодаря действию на них других тел. При отсутствии таких воздействий (или сил) скорость тела не изменяется и, следовательно, его ускорение равно нулю.

Ускорение $\vec{a}$ тела в инерциальной системе отсчёта определяется соответственно **второму закону Ньютона**:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots, \qquad (1.5)$$

где $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, ... — силы, действующие на это тело со стороны других тел. Силы являются мерой взаимодействия этого тела с другими телами. Коэффициент пропорциональности между ускорением и суммой сил в законе (1.5) — масса m тела — имеет смысл меры инертности данного тела: тело с большей массой приобретает меньшее ускорение под действием конкретной силы (или суммы сил) и, следовательно, обладает большей инертностью.

Исаак Ньютон (1642—1727) — великий английский физик, математик и астроном, один из основателей современной физики. Создатель механики (и вообще теоретической физики), первооткрыватель закона всемирного тяготения. Предложил одну из первых теорий света, создал первый телескоп-рефлектор, одним из первых исследовал интерференционные явления — кольца Ньютона. Трудно найти область физики того времени, в которой не работал бы Ньютон. Главный труд Ньютона — книга «Математические начала натуральной философии» — изменил структуру физики как науки: на смену туманным рассуждениям о «естественности устройства природы» пришли математические модели, дифференциальные уравнения и физическая интерпретация их решений.

Важнейшим достижением Ньютона стала разработка математического языка современной науки — дифференциального и интегрального исчисления (одновременно с Г. Лейбницем).

Всю жизнь занимался алхимией, пытаясь получить золото. Известна фраза Ньютона, написанная, когда ему казалось, что до получения золота осталось совсем немного: «Вонь ужасная, кажется, я близок к цели» [2].

Начиная с 1696 г. Ньютон был директором лондонского Монетного двора и, обладая государственными полномочиями, провёл ряд денежных реформ, которые привели в порядок кредитно-финансовую систему Англии после войн и революций XVII в.

Вот что сказал о Ньютоне один из его биографов, замечательный физик И. Ю. Кобзарев: «Всё, что делал Ньютон, он делал с исключительной добросовестностью и настойчивостью, и всё у него получалось. Когда он шлифовал зеркало телескопа — получалось; когда ему надо было проводить оптические опыты, они были изумительно чёткими, программа экспериментов — доказательной, вычисления он делал прекрасно. А когда он занялся полемикой с Лейбницем по вопросу о приоритете, то свёл, можно сказать, Лейбница в могилу» [3].

Умер Исаак Ньютон в 84 года в зените своей славы. Похоронен в Вестминстерском аббатстве с королевскими почестями как «национальное достояние Англии».

http://online.mephi.ru/courses/physics_origins/data/102.html

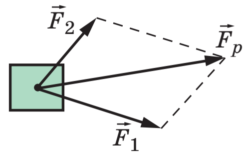


Рис. 1.3

Второй закон Ньютона (1.5) содержит несколько важных утверждений.

Во-первых, он говорит о том, что ускорения вызываются силами (впрочем, это следует и из первого закона).

Во-вторых, второй закон Ньютона фактически утверждает, что для любого взаимодействия существует независимое от закона (1.5) соотношение, определяющее силу такого взаимодействия. Или, другими словами, каждая сила взаимодействия тел (тяжести, упругости, трения и др.) определяется некоторым математическим выражением, и для нахождения ускорения тела с помощью закона (1.5) нужно дополнительно к нему задать формулы для сил, которые действуют на данное тело в рассматриваемых условиях.

В-третьих, закон (1.5) утверждает, что силы являются векторными величинами и (при наличии нескольких взаимодействий) никак «не портятся» другими силами, а просто складываются с ними по правилам векторного сложения (последнее утверждение называется принципом суперпозиции[1]). На рисунке 1.3 показан случай, когда на тело действуют две силы — $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Ускорение тела в этом случае будет таким, как будто на него действует одна сила, равная $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, причём сумму сил можно найти по правилам сложения векторов.

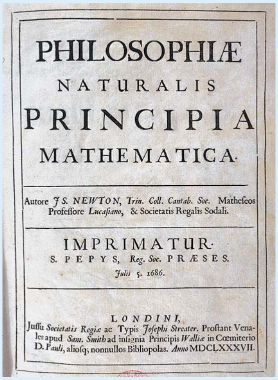
Силу, равную сумме сил, принято называть **равнодействующей силой.**

Третий закон Ньютона устанавливает другое важное свойство сил: в природе всегда происходит взаимное действие тел друг на друга (взаимодействие), причём силы такого взаимного действия равны по модулю и противоположны по направлению.

Если, например, вы толкнёте сейчас ручку, то подействуете на неё некоторой силой $\vec{F}$, благодаря которой ручка приобретёт ускорение. При этом и вы, если бы находились на абсолютно гладкой (без трения) поверхности, приобрели бы некоторое ускорение, противоположное ускорению ручки. Это значит, что на вас со стороны ручки также действует сила. Эта сила противоположна по направлению и равна по значению той силе, которой вы действуете на ручку, т. е. равна $-\vec{F}$, а существенное отличие вашего ускорения от ускорения ручки объясняется существенным различием ваших масс.

«Математические начала натуральной философии» И. Ньютона (в современном варианте название звучало бы как «Математические основы физики») — самая знаменитая и самая значимая книга в истории физики.

[1] Слово «суперпозиция» означает «наложение».


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostant Venales apud Sam. Smith ad insignia Principis Walliæ in Cœmiterio D. Pauli, aliosq; nonnullos Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

На фото представлен титульный лист первого издания, которое было опубликовано в 1687 г. тиражом около 300 экземпляров.

Во введении Ньютон пишет, что книга эта посвящена «не практической пользе» механики, не машинам и механизмам, а общим вопросам исследования движения. И провозглашает цель и средство механики: «...трудность физики... состоит в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления» [4]. Далее Ньютон формулирует три закона механики как аксиомы этой дисциплины, а затем на основе закона всемирного тяготения даёт вывод законов Кеплера и рассматривает целый ряд механических задач. Вершиной книги является рассмотрение движения Луны вокруг Земли с учётом влияния Солнца.

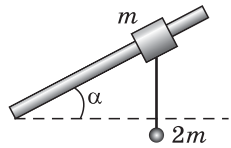
Уровень труда Ньютона совершенно несопоставим с уровнем работ его предшественников. В нём отсутствуют туманные рассуждения о причинах тех или иных явлений. Ньютон «не измышляет гипотез» (слова самого Ньютона), а строит математическую модель явления, а затем, решая соответствующие уравнения, получает наблюдаемую картину этого явления. Такой подход означал конец старой физики. Качественное описание природы уступило место количественному.

1.4. Силы в природе

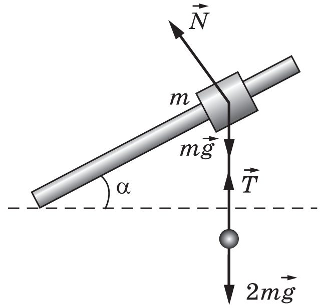
Основными величинами в ньютоновской механике являются силы. Если известны законы для сил, задача определения ускорения тел становится технической. А вот установление самих законов для сил — фундаментальная задача физики. Недаром многие силы носят имена тех физиков, которые занимались их изучением: сила Гука, сила Кулона, сила Ампера и др. Важно отметить, что для второго закона Ньютона природа каждой силы несущественна, этот закон универсален и позволяет находить ускорения тел независимо от природы взаимодействий. В школьном курсе физики рассматриваются сила тяжести, силы реакции опоры и натяжения нитей в случаях контакта тела с опорой или нитью, сила упругости (сила Гука), силы трения, сила, действующая на тело в жидкости (сила Архимеда), сила сопротивления воздуха, электрические и магнитные силы. Важно подчеркнуть, что для таких сил, как силы реакции опоры и натяжения нити, нет заранее установленных правил. Эти силы приходится определять из второго закона Ньютона вместе с ускорениями тел. Рассмотрим пример.

Задача 1.4. Гладкий стержень образует угол α с горизонтом. На стержень надета муфта массой m, которая может скользить по стержню.

К муфте на невесомой нити подвешено тело массой $2m$. Вначале муфту удерживали, и нить была вертикальна (см. рисунок). Определить силу натяжения нити сразу после того, как муфту отпустят.



Решение. На муфту действуют силы тяжести $m\vec{g}$, натяжения нити $\vec{T}$ и реакции стержня $\vec{N}$, на тело — силы тяжести $2m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{T}$. Второй закон Ньютона в проекциях на направление стержня (для муфты) и на вертикальное направление (для тела) в самый первый момент после начала движения, когда нить ещё вертикальна, даёт систему уравнений



$$ma_1 = (mg + T)\sin\alpha,$$
$$2ma_2 = 2mg - T.$$

А поскольку нить при движении тел не растягивается и не сминается, проекции векторов скорости тел на направление нити одинаковы в любой момент времени, следовательно, одинаковы и проекции ускорений:

$$a_1 \sin\alpha = a_2.$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$T = \frac{2mg\cos^2\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha}.$$

По мере необходимости мы будем вводить соответствующие силы и рассматривать задачи, в которых эти силы определяют движение тел.

Законы Ньютона вместе с уравнениями для сил позволяют в принципе ответить на основной вопрос механики, т. е. определить радиус-вектор тела как функцию времени. Идея такого решения заключается в том, что закон (1.5) позволяет находить изменение скорости тела за малые интервалы времени и, следовательно, определять скорость тела в любой момент времени, зная начальную скорость и действующие на тело силы. Знание скорости в любой момент времени позволяет находить изменения координат за малые интервалы времени и, следовательно, определять положение тела в любой момент времени. Однако математически такая задача является весьма сложной и требует решения уравнений, которые называются дифференциальными. В школьном курсе механики рассматривается единственный пример таких уравнений — уравнение колебаний. В большинстве же ситуаций законы Ньютона используются для определения ускорений тел и сил, возникающих в связях, — сил реакции и натяжения.

1.5. Законы сохранения в механике

Некоторые законы физики утверждают, что определённые комбинации координат и скоростей движущихся тел не изменяются с течением времени. Такие законы называются **законами сохранения**. В школьном курсе физики обычно рассматриваются два закона сохранения — закон сохранения импульса и закон сохранения механической энергии.

Рассмотрим закон сохранения импульса.

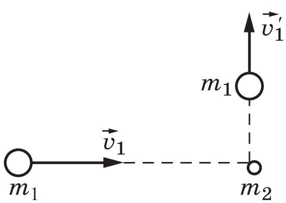
Импульсом тела называется произведение массы тела на вектор его скорости. **Импульс системы тел** представляет собой векторную сумму импульсов тел системы.

Закон сохранения импульса справедлив для замкнутых систем тел, т. е. таких систем, тела которых взаимодействуют только друг с другом, а никаких внешних воздействий нет. **Закон сохранения импульса** утверждает, что импульс замкнутой системы тел не изменяется с течением времени, притом что импульсы отдельных тел, входящих в систему, могут изменяться:

$$m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' + m_3\vec{v}_3' + \ldots = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots\ , \qquad (1.6)$$

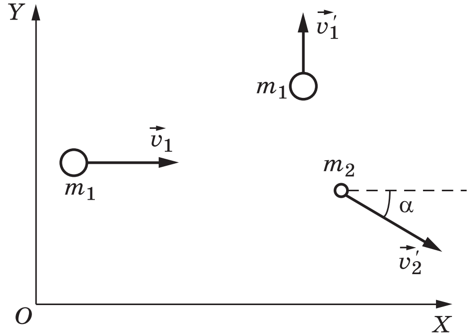
где m_1, m_2, m_3, ... — массы тел, входящих в систему, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ... — скорости тел в некоторый момент времени, $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$, $\vec{v}_3'$, ... — скорости этих тел в другой рассматриваемый момент времени. Закон сохранения импульса (1.6) является следствием второго и третьего законов Ньютона и может быть строго выведен из них. При этом замкнутость системы тел явно используется при выводе закона. Поэтому закон сохранения импульса справедлив только для замкнутых систем тел. Импульс незамкнутой системы будет, вообще говоря, изменяться с течением времени.

Закон сохранения импульса в виде уравнения (1.6) позволяет определять скорости тел после их взаимодействия. Закон является векторным, поэтому связь между значениями скоростей можно установить с помощью геометрического решения уравнения (1.6). Рассмотрим пример.



Задача 1.5. Тело массой m_1 налетает со скоростью $\vec{v}_1$ на неподвижное тело с массой m_2 и после удара движется со скоростью $\vec{v}_1'$ в направлении, перпендикулярном первоначальному (см. рисунок). Определите направление движения и скорость второго тела после удара. Считайте, что система тел замкнута.

Решение. Поскольку система тел по условию замкнута, для неё справедлив закон сохранения импульса, который при нулевой скорости второго тела до столкновения имеет вид



$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2',$$

где $\vec{v}_2'$ — скорость второго тела после столкновения. Проецируем закон сохранения импульса на оси, одна из которых (OX) направлена вдоль вектора v_1, вторая (OY) — вдоль вектора $\vec{v}_1'$ (см. рисунок). Получаем

$$\begin{aligned} m_1v_1 &= m_2v_2'\cos\alpha, \\ 0 &= m_1v_1' - m_2v_2'\sin\alpha, \end{aligned} \qquad (*)$$

где α — угол между осью OX и вектором $\vec{v}_2'$. Перенося слагаемое m_1v_1' во втором уравнении системы (*) в левую часть, возводя уравнения в квадрат и складывая их, получаем уравнение, в которое не входит угол α. Решение этого уравнения относительно неизвестной скорости второго тела даёт

$$v_2' = \frac{m_1\sqrt{v_1^2 + (v_1')^2}}{m_2}.$$

Если перенести слагаемое $m_1\vec{v}_1'$ во втором уравнении системы (*) в левую часть и разделить второе уравнение на первое, получим уравнение относительно тангенса угла α, решая которое получим

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{v_1}{v_1'}\right).$$

Как уже упоминалось, импульс не единственная сохраняющаяся в механике величина. Если в некоторой системе тел не действуют силы трения или сопротивления, то сохраняется механическая энергия этой системы. Рассмотрим этот закон в два шага.

Первый шаг. На основе второго закона Ньютона можно доказать, что изменение кинетической энергии тела за некоторый интервал времени равно сумме работ, совершённых за это время действующими на это тело силами (это утверждение называется **теоремой об изменении кинетической энергии**[1]):

$$\frac{mv_{\text{кон}}^2}{2} - \frac{mv_{\text{нач}}^2}{2} = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots . \qquad (1.7)$$

[1] Слово «теорема» в названии этого закона является общеупотребительным, хотя и несколько необычным для физики. Тем не менее оно подчёркивает, что закон (1.7) можно доказать на основе законов Ньютона, которые сами никак не доказываются на основе каких-то других утверждений, а являются законами природы.

Понятие импульса было введено в 1644 г. **Рене Декартом,** который определил его как произведение «величины тела на скорость его движения» и считал мерой (или количеством) движения тела (однако не учитывал его векторный характер). Декарт первым высказал предположение о сохранении импульса системы тел. Однако выдающийся немецкий учёный **Готфрид Лейбниц** в статье с длинным и претенциозным названием «Краткое доказательство замечательной ошибки Декарта и других насчёт закона природы, посредством которого, как они думали, Бог сохраняет всегда одинаковое количество движения в природе и который, однако, извращал всю механику» [5] доказал, что при одинаковой работе силы у тел одинаково изменяется величина mv^2, которую и надо, следовательно, считать количеством движения. К аналогичному выводу пришёл и **Христиан Гюйгенс**, который экспериментально доказал, что при столкновении упругих шаров сохраняется сумма произведений их масс на квадраты скоростей.

В результате физики разделились на два непримиримых лагеря: в одном находились те, кто считал мерой количества движения величину mv, в другом — mv^2. Спор продолжался более 100 лет. В результате оказалось, что обе величины при определённых условиях сохраняются: одна из них — это импульс, другая — удвоенная кинетическая энергия.

Р. Декарт

Г. Лейбниц

Х. Гюйгенс

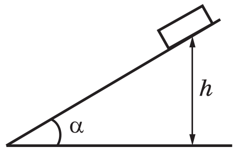
Здесь величина $mv^2/2$ называется **кинетической энергией** тела (m — масса тела, v — его скорость в конце и в начале рассматриваемого интервала времени), A_1, A_2, A_3, ... — работы действующих на тело сил.

Работа силы в механике определяется так. Если тело движется по прямой, а сила не меняется, её работа равна

$$A = F\Delta r\cos\alpha, \tag{1.8}$$

где F — модуль силы, Δr — модуль перемещения, α — угол между вектором силы и вектором перемещения. Если же сила изменяется или траектория тела не прямая, то для вычисления работы траекторию тела нужно мысленно разделить на такие малые участки, на каждом из которых силу можно считать постоянной, вычислить для каждого такого участка работу силы согласно формуле (1.8), просуммировать по всем участкам. Рассмотрим пример.

Задача 1.6. На наклонной плоскости с углом наклона α на высоте h находится маленькое тело (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью k ($k < \operatorname{tg}\alpha$). Тело отпускают. Определите скорость тела в конце плоскости.



Решение. При выполнении условия $k < \operatorname{tg}\alpha$ тело будет двигаться. Применяем для движения тела по плоскости теорему об изменении кинетической энергии (1.7):

$$\frac{mv^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_{\text{тр}}.$$

Здесь m — масса тела, v — его скорость в конце плоскости, A_{mg}, A_N, $A_{\text{тр}}$ — работы сил тяжести, реакции опоры и трения, т. е. всех сил, действующих на тело в процессе его движения по плоскости. Используя определение работы (1.8), получим

$$A_{mg} = mgs\cos(90° - \alpha) = mgh,$$
$$A_N = Ns\cos(0°) = 0,$$
$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}s\cos(180°) = -kmgs\cos\alpha,$$

где s — длина плоскости, N — сила реакции наклонной плоскости, $F_{\text{тр}} = kmg\cos\alpha$ — сила трения, действующая на тело при его движении по наклонной плоскости. Отсюда находим

$$v = \sqrt{2gh(1 - k\operatorname{ctg}\alpha)}.$$

Условие движения по плоскости ($k < \operatorname{tg}\alpha$) обеспечивает неотрицательность подкоренного выражения.

Второй шаг. Для всех сил, кроме силы трения или сопротивления, можно ввести понятие **потенциальной энергии** — такой функции координат, разность значений которой в начале и конце траектории равна работе этой силы на данном участке траектории:

$$A_{1\to2} = \Pi_1 - \Pi_2, \tag{1.9}$$

где $A_{1\to2}$ — работа потенциальной силы при перемещении тела из некоторой точки *1* в некоторую точку *2*, Π_1 и Π_2 — значения потенциальной энергии для этой силы в точках *1* и *2*.

В результате теорема об изменении кинетической энергии (1.7) для движения тела из точки *1* в точку *2* приобретает вид

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1\to 2} = \Pi_1 - \Pi_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{mv_2^2}{2} + \Pi_2 = \frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1. \qquad (1.10)$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий тела при перемещении тела из точки *1* в точку *2* сохраняется. Эта сумма называется **механической энергией тела.**

В школьном курсе физики рассматриваются два вида потенциальной энергии, которые нужно запомнить и научиться использовать в рамках закона сохранения механической энергии (1.10): потенциальная энергия силы тяжести и потенциальная энергия силы упругости.

Для определения **потенциальной энергии тела в поле силы тяжести** нужно выбрать уровень начала отсчёта потенциальной энергии. Тогда потенциальная энергия тела определяется соотношением

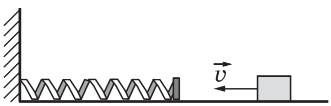
$$\Pi_{\text{тяж}} = \pm\, mgh, \qquad (1.11)$$

где h — высота расположения тела по отношению к выбранному уровню начала отсчёта потенциальной энергии, знак «+» ставится, если тело находится выше уровня начала отсчёта, знак «−» — если ниже.

Потенциальная энергия упругости пружины в положении, когда она сжата или растянута на длину Δl, определяется соотношением

$$\Pi_{\text{упр}} = \frac{k\Delta l^2}{2}, \qquad (1.12)$$

где k — жёсткость (коэффициент упругости) пружины. Рассмотрим два примера, в которых используются потенциальные энергии (1.11) и (1.12) и закон сохранения механической энергии (1.10).



Задача 1.7. Брусок массой m, движущийся со скоростью v по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на горизонтально расположенную пружину с жёсткостью k (см. рисунок). На какую максимальную длину Δl сожмётся пружина? Какой будет скорость бруска в тот момент, когда пружина сожмётся на половину этой максимальной длины?

Решение. Механическая энергия системы определяется как сумма кинетической энергии бруска и потенциальной энергии пружины. Поскольку в начальный момент пружина не деформирована, а в конце брусок на мгновение остановился, то в начале равна нулю потенциальная энергия пружины, в конце — кинетическая энергия тела. Поэтому из закона сохранения механической энергии для начального положения и максимального сжатия следует равенство

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{k\Delta l^2}{2},$$

откуда находим

$$\Delta l = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v. \qquad (*)$$

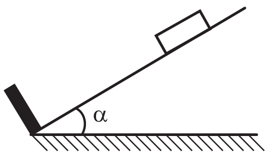
Применим теперь закон сохранения механической энергии к сжатию на половину максимального. Имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{k\left(\Delta l \,/\, 2\right)^2}{2},$$

где v_1 — скорость тела в тот момент, когда сжатие пружины равно половине максимального сжатия Δl, которое определяется формулой (*). В результате получим

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} v.$$

Задача 1.8. На наклонной плоскости с углом наклона α находится маленькое тело (см. рисунок). На расстоянии l от тела находится упругая стенка. Коэффициент трения между телом и плоскостью — k ($k < \operatorname{tg}\alpha$). Тело отпускают. Какой путь пройдёт тело к моменту его полной остановки? Столкновения тела со стенкой упругие.



Решение. Поскольку $k < \operatorname{tg}\alpha$, то тело будет скользить по плоскости и окончательно остановится только около стенки. При этом движение тела будет таким: оно спустится к стенке, отразится от неё и поднимется на меньшую высоту из-за потери части энергии на трение. Затем второй раз. Затем третий и т. д. Если считать тело точечным, удар бесконечно коротким и абсолютно упругим, то тело бесконечное количество раз ударится о стенку. Поэтому если вычислять работу по определению этой величины, то придётся просуммировать бесконечное количество работ. С другой стороны, несмотря на подъёмы и спуски по плоскости, работа силы тяжести будет равна убыли потенциальной энергии тела, т. е. $A_{\text{т}} = mgl\sin\alpha$. А из теоремы об изменении кинетической энергии заключаем, что эта работа равна взятой со знаком «минус» работе силы трения, которая определяется пройденным телом путём:

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}s = -kmgs\cos\alpha.$$

Следовательно, пройденный телом путь

$$s = \frac{1}{k} l \operatorname{tg}\alpha.$$

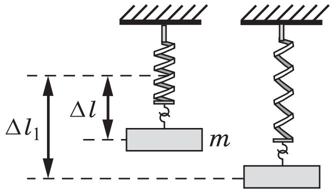
Если просуммировать работы на всех подъёмах-спусках, получится тот же самый ответ. Предлагаем любознательному читателю провести эти вычисления самостоятельно, тем более что бесконечная сумма в этой задаче вычисляется — она сводится к сумме геометрической прогрессии.

Термин «энергия» происходит от слова *energeia* (в переводе с греч. — действие) и впервые появился в трудах Аристотеля.

Как произведение массы тела на квадрат скорости эту величину ввёл в физику **Г. В. Лейбниц**, который назвал её «живая сила» и сформулировал принцип её сохранения.

В 1807 г. **Т. Юнг** применил термин «энергия» вместо термина «живая сила», который использовал Лейбниц. Термин «кинетическая энергия» первым упомянул **Г. Кориолис** в 1829 г. В 1853 г. **У. Ренкин** ввёл понятие потенциальной энергии и сформулировал закон сохранения механической энергии. Параллельно в термодинамике в работах **Дж. Джоуля, Ю. Майера, Г. Гельмгольца, У. Томсона, Р. Клаузиуса** появился термин «тепловая энергия». **Дж. Максвелл** обратил внимание на то, что важны лишь изменения тех или иных видов энергии: «Мы должны рассматривать энергию системы тел как величину, в отношении которой мы можем лишь установить, происходит ли её увеличение или уменьшение при переходе системы из одного определённого положения в другое. Абсолютная величина энергии при стандартных условиях нам неизвестна, и это не имеет для нас значения, поскольку все явления определяются изменениями энергии, а не её абсолютной величиной» [6].

А в начале XX в. великий французский математик **А. Пуанкаре**, независимо от **А. Эйнштейна** создавший первый вариант релятивистской теории гравитации, сказал про энергию: «Поскольку мы не в состоянии дать общее определение энергии, закон сохранения энергии следует рассматривать просто как указание на то, что существует НЕЧТО, остающееся постоянным в любом физическом процессе. К каким бы открытиям ни привели нас будущие эксперименты, мы заранее знаем, что и тогда будет НЕЧТО, обладающее способностью сохраняться, и это НЕЧТО мы можем называть энергией.» [7] И сегодня мы не знаем ни одного исключения из этого всеобщего закона.



Задача 1.9. Груз массой m подвешен к свободному концу висящей невесомой пружины с жёсткостью k. В начальный момент груз удерживают так, что пружина растянута на длину Δl по сравнению со своим недеформированным состоянием. Груз отпускают, и он начинает двигаться вниз. Определите максимальное удлинение пружины в процессе последующего движения.

Решение. Так как после освобождения груз начинает опускаться, сила упругости, действующая на груз в начальном положении, меньше его силы тяжести. Пусть максимальное удлинение пружины по сравнению с недеформированным состоянием равно Δl_1 (см. рисунок). Для определения этой величины применим к движению тела от начального положения до положения, в котором пружина будет максимально растянута, закон сохранения механической энергии. Полная механическая энергия тела складывается из кинетической энергии груза, потенциальной энергии груза в поле силы тяжести и потенциальной энергии упругости пружины.

Выберем за начало отсчёта потенциальной энергии в поле силы тяжести положение тела в момент максимального растяжения пружины. Тогда полная механическая энергия E_1 тела в начальном положении равна

$$E_1 = \frac{k\Delta l^2}{2} + mg\left(\Delta l_1 - \Delta l\right). \qquad (*)$$

В уравнении (*) учтено условие, что начальная кинетическая энергия тела равна нулю. Механическая энергия E_2 тела в положении максимального растяжения пружины также сводится только к потенциальным энергиям тяготения и упругости, но потенциальная энергия тяготения равна нулю (так выбрано начало её отсчёта). Поэтому энергия E_2 определяется выражением

$$E_2 = \frac{k\Delta l_1^2}{2}. \qquad (**)$$

По закону сохранения механической энергии $E_1 = E_2$. В результате из равенств (*) и (**) получаем квадратное уравнение относительно искомой величины Δl_1:

$$\frac{k\Delta l_1^2}{2} - mg\Delta l_1 + mg\Delta l - \frac{k\Delta l^2}{2} = 0. \qquad (***)$$

Решая уравнение (***), находим:

$$\left(\Delta l_1\right)_1 = \Delta l, \qquad \left(\Delta l_1\right)_2 = \frac{2mg}{k} - \Delta l.$$

Очевидно, что первый корень отвечает начальному положению тела. Следовательно, максимальная длина пружины определяется вторым корнем квадратного уравнения (***).

1.6. Статика

Раздел механики, рассматривающий равновесие тел, называется **статикой**. Материальная точка находится в равновесии, если сумма всех действующих на неё сил равняется нулю:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0. \qquad (1.13)$$

Для протяжённого твёрдого тела условия (1.13) недостаточно, поскольку даже при выполнении условия (1.13) тело может вращаться.

Для отсутствия вращения должна равняться нулю сумма моментов всех сил относительно произвольного начала отсчёта:

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = 0. \qquad (1.14)$$

Напомним определение **момента силы**. Пусть на протяжённое твёрдое тело действует сила $\vec{F}$, приложенная к какой-то точке этого тела (рис. 1.4). Моментом M силы $\vec{F}$ относительно некоторой точки O называется произведение модуля F этой силы на расстояние d от точки O до линии действия силы (плечо силы):

$$M = \pm Fd. \qquad (1.15)$$

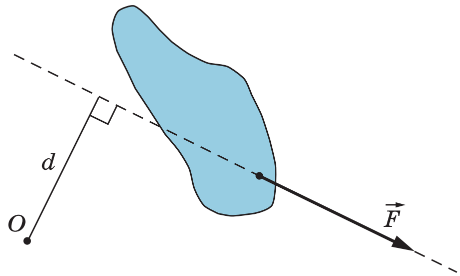


Рис. 1.4

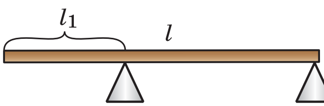
Знак момента силы определяется так. Момент силы, стремящейся повернуть тело относительно точки O по часовой стрелке, считается отрицательным, против часовой стрелки — положительным[1].

Условия (1.13) и (1.14) позволяют исследовать равновесие тела или системы тел либо определять силы, действующие на тело, находящееся в равновесии. При этом для протяжённых тел более информативным является условие моментов (1.14). Кроме того, использование условия моментов упрощается тем, что положение оси для вычисления моментов можно выбирать произвольно. Как правило, эту точку выбирают так, чтобы моменты как можно большего числа сил были равны нулю.

В некоторых случаях в задачах статики приходится вычислять моменты сил, у которых нет определённой точки приложения и которые действуют на каждый элемент исследуемого тела. Такие силы принято называть **распределёнными,** в отличие от сил с определённой точкой приложения, которые в этом контексте называют **сосредоточенными.** Распределёнными силами являются силы тяжести, трения, реакции опоры, действующие на протяжённое твёрдое тело. Для вычисления момента распределённой силы, например силы тяжести, нужно разбить тело на малые элементы, вычислить момент силы тяжести, действующей на каждый элемент, просуммировать полученные моменты. В результате суммарный момент силы тяжести оказывается таким же, как если бы полная сила тяжести была приложена к некоторой точке, которая называется **центром тяжести** тела. Можно доказать, что если тело обладает центральной симметрией (сфера, шар, прямоугольный параллелепипед), а элементарные силы, действующие на все элементы исследуемого тела, пропорциональны их массам и одинаково направлены, то центр тяжести тела совпадает с его геометрическим центром. В этом случае для вычисления момента распределённой силы нужно

[1] Момент силы — величина векторная; однако в школьном курсе физики рассматриваются только такие ситуации, когда векторы сил лежат в одной плоскости, а векторы моментов направлены вдоль одной прямой. Поэтому в школьном курсе физики ограничиваются введением проекции векторов момента на координатную ось (не произнося, однако, эти слова). Данное выше определение отвечает именно этой величине.

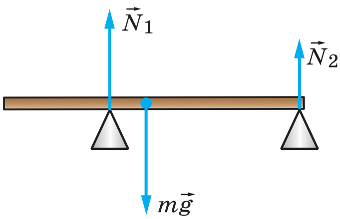
равнодействующую распределённую силу приложить к геометрическому центру тела и вычислить момент этой силы так, как будто она является сосредоточенной. Единственное несимметричное тело, которое может встретиться в задачах школьного курса физики, — плоский треугольник. Его центр тяжести лежит в точке пересечения медиан. Рассмотрим пример.



Задача 1.10. Однородная доска длиной l и массой m в горизонтальном положении покоится на двух опорах (см. рисунок). Определите силы реакции опор, если на первую из них доска опирается одним своим краем, а на вторую — местом, расположенным на расстоянии l_1 от другого края.

Решение. На доску действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и две силы реакции опор $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, для которых выполняются условия равновесия — условия сил и моментов (см. рисунок). Условие сил даёт уравнение

$$N_1 + N_2 = mg.$$



Поскольку доска лежит на опорах несимметрично, то силы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ разные, и, следовательно, одного уравнения сил мало для нахождения сил реакции опор. Воспользуемся условием моментов. Поскольку сила тяжести приложена к центру доски, условие моментов относительно левой опоры даёт уравнение

$$N_2(l - l_1) = mg\left(\frac{l}{2} - l_1\right),$$

откуда находим:

$$N_2 = \frac{mg(l - 2l_1)}{2(l - l_1)}. \qquad (*)$$

Из условия моментов относительно правой опоры аналогично получаем

$$N_1 = \frac{mgl}{2(l - l_1)}. \qquad (**)$$

Легко проверить, что сумма сил реакции (*) и (**) равна силе тяжести доски, т. е. условие сил тоже выполняется. Отметим, что полученное решение справедливо, если $l_1 < \frac{l}{2}$. В противном случае доска не будет находиться в равновесии.

Перечисленные законы и идеи фундаментальной механики будут использованы ниже для описания работы машин и механизмов, передачи силы и движения, т. е. для объяснения того, что принято называть прикладной механикой.

1.7. Чего не может механика

Вопросы установления законов для сил выходят за рамки компетенции механики и решаются теми разделами физики, которые рассматривают соответствующие взаимодействия — электрические, магнитные, ядерные и др. Конечно, при описании действия этих сил мы используем законы Ньютона, но эти вопросы уже выходят за рамки механики.

Что же касается самой механики, то главные нерешённые вопросы этой дисциплины связаны с тем, что математически уравнения движения даже для материальных точек являются очень сложными и не всегда решаемыми. Также очень сложными являются уравнения для расчёта характеристик прочности мостов, зданий и других инженерных сооружений. Поэтому для решения механических задач физики часто прибегают к приближённым методам и численным вычислениям с помощью компьютеров.

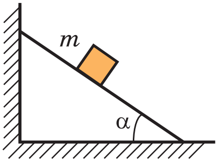
Задачи для самостоятельного решения

1.1. Две машины выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. Машины встретились на расстоянии l от пункта A, затем доехали до пунктов B и A, развернулись и поехали назад. Вторая встреча машин произошла на расстоянии $3l/4$ от пункта B. Определите расстояние AB, если скорости машин постоянны.

1.2. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали две машины. Через некоторое время они встретились и продолжили двигаться в тех же направлениях. Известно, что машина, выехавшая из пункта A, достигла пункта B через время t_1 после встречи со второй машиной, а машина, выехавшая из пункта B, достигла пункта A через время t_2 после встречи с первой. Через какое время после начала движения машины встретились?

1.3. Тело двигалось прямолинейно и равноускоренно с начальной скоростью v_0. Известно, что скорость тела увеличилась в два раза (оставаясь такой же по направлению), когда тело прошло путь s. Через какое время после начала движения скорость тела увеличилась в n раз по сравнению с начальной?

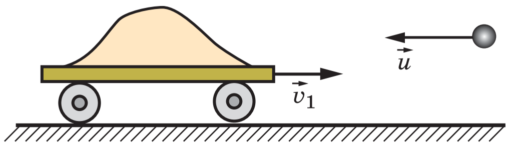
1.4. Тело свободно падает из состояния покоя с высоты h. За какое время тело пройдёт первую, вторую, третью и четвёртую четверти своего пути до поверхности земли?



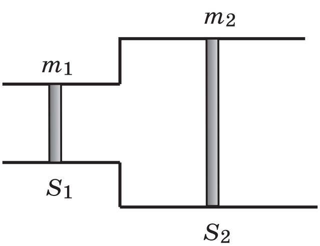
1.5. Около вертикальной стенки на гладком горизонтальном полу находится клин с углом наклона α. На наклонную грань клина кладут тело массой m (см. рисунок). Определите силу, с которой клин действует на вертикальную стенку. При каком угле α эта сила максимальна?

1.6. Две команды играют в игру «перетягивание каната». Каждая тянет канат с силой 5000 Н. Чему равна сила натяжения каната?

1.7. Тележка с песком общей массой $M = 10$ кг движется со скоростью $v_1 = 1$ м/с по гладкой горизонтальной поверхности (см. рисунок). В песок попадает и застревает в нём шар массой $m = 2$ кг, летевший навстречу тележке с горизонтальной скоростью $u = 2$ м/с. В какую сторону и с какой скоростью покатится тележка после попадания шара?



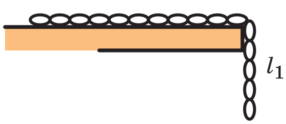
1.8. Покоящееся ядро некоторого атома самопроизвольно делится на три ядра-осколка с массами m, $2m$ и $5m$. Скорости двух первых осколков взаимно перпендикулярны и равны $3v$ и $2v$. Чему равна скорость третьего осколка?



1.9. Две трубы с сечениями S_1 и S_2 сварены друг с другом, заполнены гремучим газом и закрыты поршнями массами m_1 и m_2 (см. рисунок). После взрыва поршни вылетают из труб, причём первый вылетел со скоростью v_1. С какой скоростью v_2 вылетел второй, если трубы закреплены? Трением поршней о трубы и массой газа можно пренебречь.

1.10. Тело массой m движется со скоростью v. После упругого столкновения со стенкой тело стало двигаться в противоположном направлении с такой же скоростью. Чему равна работа силы, действующей на тело со стороны стенки?

1.11. Цепочка длиной l лежит на «грани соскальзывания» на горизонтальном столе, при этом со стола свешивается конец цепочки длиной l_1 (см. рисунок). В некоторый момент времени от небольшого толчка цепочка начинает двигаться, соскальзывая со стола. Какой будет скорость v цепочки, когда она полностью соскользнёт со стола?



1.12. От груза, висящего на невесомой пружине с жёсткостью $k = 500$ Н/м, с нулевой начальной скоростью отрывается часть массой $m = 1{,}5$ кг. На какую максимальную высоту поднимется после этого оставшаяся часть груза? Примите $g = 10$ м/с^2 .

ГЛАВА 2

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА — ТЕОРИЯ РАБОТЫ МЕХАНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

Кинематика, динамика и статика механизмов

2.1. Прикладная механика — основа технического прогресса

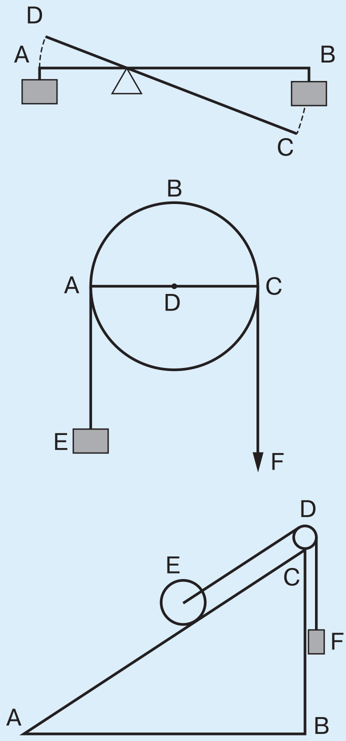
Механика, которую изучают в рамках школьного курса физики и о которой мы напомнили в первой главе, занимается общими вопросами теории движения. В качестве движущихся объектов используются, как правило, материальные точки; протяжённые тела рассматриваются только в статике. При этом делается целый ряд упрощений. Такие упрощения, с одной стороны, позволяют нам решать конкретные механические задачи, с другой — уводят очень далеко от практической цели механики, само название которой переводится с греческого как «искусство построения машин». Поэтому механику условно разделили на фундаментальную, задача которой — рассмотрение общих свойств и принципов движения, и прикладную, в которой рассматриваются теория, принципы работы и классификация машин и механизмов.

Прикладная механика появилась почти одновременно с математикой и астрономией. Палка, рычаг, колесо — первые механизмы, придуманные или взятые в руки людьми. Потом люди научились крепить колёса к повозке, строить подъёмные механизмы, создавать другие устройства, облегчающие труд. С помощью таких устройств открывали двери в египетских храмах, спускали на воду тяжёлые корабли, бросали тяжёлые камни в неприятеля. Далее нужно было придумать методы расчёта и правила создания таких устройств.

Именно прикладная механика стала локомотивом промышленной революции XVII—XVIII вв. в Англии, когда на смену рабочим стали приходить машины. В 1765 г. Джеймс Харгривс собрал механическую прялку *Spinning Jenny*, которая одна заменяла сразу двадцать прядильщиц, и подал пример другим изобретателям. В XIX в. появились пароход, паровоз, двигатели, автомобиль и др. И всё это благодаря прикладной механике, которую с полным правом можем назвать одним из главных двигателей прогресса.

Реальные механические системы могут быть очень сложными, и, чтобы разобраться в их работе, нам придётся прибегать ко многим упрощениям, в частности считать тела недеформируемыми, рычаги прямыми, колёса идеально круглыми. Без выделения в явлении главного и отбрасывания второстепенного практически невозможно построить практичной теории. Поэтому в нашем курсе мы будем рассматривать не настоящие машины и механизмы, а только более или менее похожие на них модели (иногда и непохожие, но содержащие их основные черты[1]).

Основы прикладной механики были заложены **Архимедом**, который придумал пять простых механизмов: рычаг, клин, блок, бесконечный винт и лебёдку. Из рассказа римского историка Полибия мы знаем, какие возможности давали сконструированные Архимедом машины. Интересно, что прикладная механика считалась в Античности «низкой», ремесленной наукой, поскольку касалась практической деятельности человека, и Архимед был вынужден покинуть Александрию, где он учился и работал в молодости.



Рисунки Галилея

Создателем современной прикладной механики считается **Галилео Галилей**, разработавший теорию простых механизмов и давший нам общий метод их анализа в виде **принципа возможных перемещений**. В небольшой по объёму книге «Механика» Галилей рассматривает работу простых механизмов Архимеда и строит их теорию. Причём Галилей сразу говорит о том, что никакие машины не смогут «обмануть природу» (Галилей использует именно эти слова [9]), в том смысле, что при получении выигрыша в силе мы обязательно получаем проигрыш в расстоянии или скорости перемещения: «Выигрывая в силе, столько же теряем в быстроте». (Галилей здесь приводит такой замечательный пример: хотите перенести тяжёлое тело маленькой силой, разделите его на малые части, каждую из которых наша сила перенести может, а затем соедините части. Тело перенесено, но точка приложения нашей силы совершила во столько же раз большее перемещение, во сколько раз наша сила меньше силы, способной переместить груз целиком.) Конечно, при этом Галилей не использует ни понятие «энергия», ни понятие «работа». Их время придёт лет через 150—200.

Академик В. А. Стеклов писал о рассуждениях Галилея: «Галилей обобщает все эти частные случаи, распространяя начало возможных перемещений на все простые машины, связанные с рычагом и наклонной плоскостью. В этом обобщении и состоит заслуга Галилея. Интуитивная способность, заметив известное свойство явлений на некоторых частных случаях,

[1] Например, одна из работ выдающегося русского математика и механика П. Л. Чебышёва начиналась словами: «Предположим, человек имеет форму шара» [8].

угадать в них общий закон, провидеть его и распространить на более обширный класс случаев, играет первостепенную роль в развитии любой науки о природе, а мыслитель, совершающий такое обобщение единичных наблюдений, постигающий всеобщность замечательных частных фактов, должен быть признан занимающим почётное место в ряду двигателей науки» [10].

И ещё один интересный факт. Рассматривая блоки, ворот, наклонную плоскость, Галилей рисует буквально такие же картинки, какие рисуют современные школьники, решая задачи по физике в старших классах. За 400 лет то, что делалось на переднем крае науки, не просто стало общепризнанным, а дошло до изучения в школах.

Обычно в курсах прикладной механики выделяют три раздела — статику, динамику и кинематику механизмов. Мы сохранили эту традицию и в настоящем пособии, но, кроме общего изучения теории этих разделов механики, рассмотрим и конкретные механизмы, созданные механиками и инженерами. Статика посвящена изучению равновесия тел и связанных с этим возможностей преобразований одних совокупностей сил в другие, эквивалентные данным. В ней также рассматриваются возможные нарушения равновесия. В динамике простых механизмов изучаются их движение в связи с силовыми взаимодействиями между частями механизма, возможности передачи движения и необходимые для этого силы. Кинематика механизмов была создана после статики и динамики, в середине XIX в., в связи с конструированием машин и необходимостью моделирования их движения. В кинематике движение механизмов рассматривается как заданное и изучаются параметры этого движения без исследования его причин. Основными характеристиками движений в кинематике являются: траектория, пройденный путь, скорость и ускорение тела. Давайте рассмотрим эти разделы прикладной механики более подробно.

2.2. Статика механизма — условия равновесия механизма и его частей

Как указывалось в первой главе, чтобы протяжённое тело находилось в равновесии при действии на него некоторых сил (рис. 2.1), должны быть выполнены два условия.

1. Сумма всех внешних сил, действующих на тело, должна равняться нулю (условие поступательного равновесия, или **условие сил**):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots = 0. \qquad (2.1)$$

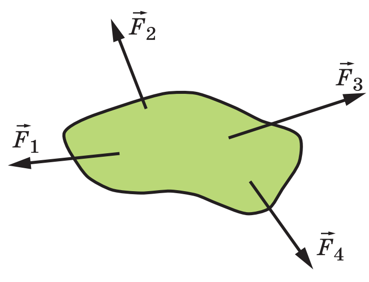


Рис. 2.1

2. Сумма моментов всех сил, вычисленных относительно произвольного начала отсчёта, должна равняться нулю (условие вращательного равновесия, или **условие моментов**):

$$M_1 + M_2 + M_3 + \ldots = 0. \tag{2.2}$$

При этом в школьном курсе механики рассматриваются только такие ситуации, когда силы лежат в одной плоскости; в этом случае момент силы считаем алгебраической величиной, знак которой определяется направлением вращения, сообщаемого телу данной силой.

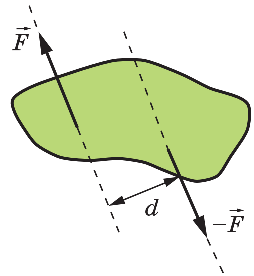


Рис. 2.2

Иногда в статике рассматривают действие на тело двух сил, равных по модулю, противоположных по направлению и приложенных к разным точкам тела (рис. 2.2). Такие две силы принято называть **парой сил**. Очевидно, пара сил пытается сообщить телу только вращение, но не поступательное движение. Можно проверить, что момент пары сил не зависит от выбора начала отсчёта моментов и равен

$$M = Fd,$$

где F — модуль любой из сил пары, d — расстояние между линиями действия сил пары. Если $F \to \infty$, а $d \to 0$ так, что их произведение остаётся конечным, говорят о действии на тело сосредоточенного момента сил.

Из условия равновесия **рычага** следует один из главных **принципов** расчёта механизмов, который был впервые сформулирован Архимедом, а потом (на несколько других основаниях) Галилеем.

Суть его заключается в том, что если механизм обеспечивает выигрыш в силе в N раз (пример: рычаг позволяет поднять на высоту h тяжёлый груз, преодолевая большую силу его веса), то перемещение H точки приложения внешней силы (например, мускульной силы человека к рычагу) будет ровно в N раз больше, чем перемещение самого груза:

$$\frac{H}{h} = N. \tag{2.3}$$

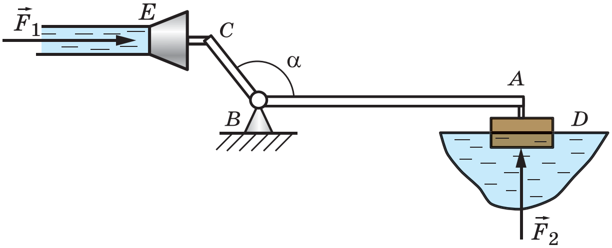
Этот принцип работает и для достаточно сложных систем рычагов и блоков. С точки зрения современной механики его можно рассматривать как прямое следствие закона сохранения энергии:

если пренебречь трением и потерями энергии на движение частей самого механизма, то работа $A = FH$ приложенной к рычагу силы должна равняться работе, совершённой рычагом при подъёме груза:

$$A = NF \cdot h = NF\frac{H}{N} = F \cdot H.$$

В прикладной механике условия равновесия (2.1) и (2.2) имеют значение не только для исследования равновесия тел, но и для построения метода «передачи» сил. Действительно, любой механизм передачи силы представляет собой тело, на которое мы действуем одной силой и которое в зависимости от своего устройства действует другой силой на внешние тела. При этом предполагается, что это тело (механизм) перемещается медленно, поэтому в любой момент находится в равновесии. Что касается внутренних напряжений, возникающих в механических конструкциях, то их определяют, применяя условия равновесия к тем или иным частям конструкции. Рассмотрим пример.

Задача 2.1. Поплавковый регулятор уровня воды состоит из двуплечего рычага ABC, одно плечо которого связано с плавающим в воде поплавком D, другое — с запирающим трубопровод клапаном E (см. рисунок). Угол между плечами рычага составляет $\alpha = 120°$. Регулятор служит для прекращения подачи воды при заполнении бака водой. В этот момент плечо AB рычага располагается горизонтально. Считая, что $AB = 300$ мм, $BC = 30$ мм, а сила давления воды на клапан $F_1 = 60$ Н, определите значение действующей на поплавок подъёмной силы F_2. Весом частей регулятора пренебрегите.



Решение. Условие равновесия рычага (уравнение моментов относительно точки B):

$$F_1\,BC\cos(\alpha - 90°) = F_2\,AB.$$

Отсюда находим:

$$F_2 = \frac{F_1\,BC\cos(\alpha - 90°)}{AB} = 5{,}2\ \text{Н}.$$

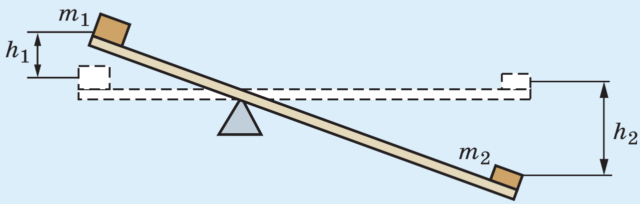
Из проведённых в решении рассуждений видно, что условием равновесия безмассового рычага, на одном плече которого закреплён груз массой m_1, на другом — груз массой m_2, является соотношение

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \tag{2.4}$$

которое непосредственно следует из уравнения моментов для рычага.

Формулу (2.4) использовал ещё Архимед, затем Галилей получил это соотношение своим способом.

Рассуждения Галилея здесь очень интересны. Галилей рассуждал так. Положим на один конец рычага массу m_1, на второй — массу m_2. Если рычаг не будет в равновесии, то одна из этих масс поднимется, вторая опустится. Но ведь движение рычага происходит под действием силы тяжести, которая стремится все тела опустить вниз. Следовательно, движение рычага должно быть таким, чтобы опускалось больше массы, чем поднималось. Но высота подъёма или опускания массы зависит не только от массы, но и от расстояния — опускание одной и той же массы m на высоту h или $2h$ — разные опускания, причём второе «состоит» из двух первых. Поэтому будет опускаться масса с той стороны рычага, с которой произведение силы тяжести на перемещение массы будет больше:

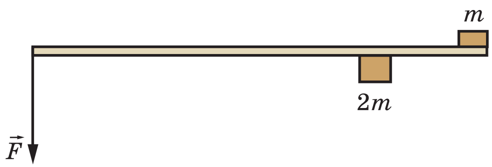


$$m_1gh_1 < m_2gh_2,$$

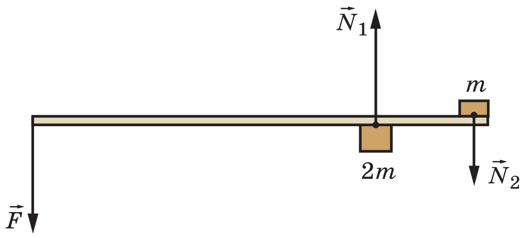
и с обратной стороны, если наоборот. Поэтому в равновесии рычаг будет тогда, когда равны произведения масс на их перемещения. А поскольку перемещения концов рычага относятся как его плечи, то в равновесии рычаг будет тогда, когда равны произведения масс на плечи (2.4).

Рассмотрим ещё один пример с потерей равновесия рычага.

Задача 2.2. Рычаг длиной l вставляют между двумя маленькими телами с массами $2m$ и m, расположенными на горизонтальной поверхности на расстоянии $l/4$ друг от друга. Коэффициенты трения тел о поверхность одинаковы и равны k. Один конец рычага находится около тела массой m, ко второму прикладывают внешнюю силу $\vec{F}$, перпендикулярную рычагу (см. рисунок; вид сверху). Внешнюю силу медленно увеличивают. Какое из тел раньше сдвинется с места? При каком значении силы F? Рычаг считайте абсолютно твёрдым.



Решение. Сразу и не скажешь. С одной стороны, тело m находится дальше от точки приложения силы $\vec{F}$, и потому кажется, что его пытается сдвинуть больший рычаг. С другой стороны, на тело $2m$ должна действовать бóльшая сила, поскольку в равновесии сила реакции направлена противоположно двум другим силам, действующим на рычаг. С третьей стороны, силы трения, которые действуют на тела, разные, и потому тела начнут двигаться по поверхности при разных сдвигающих силах.



Поэтому поступим так: пока тела покоятся, работают уравнения статики, из которых можно найти силы, действующие со стороны рычага на тела. Тела начнут двигаться, когда эти силы превысят максимальные силы трения тел.

Итак, пока тела не сдвинулись с места, стержень также покоится. Поэтому до самого момента сдвига одного из тел для стержня справедливы уравнения статики. На стержень действуют: внешняя сила $\vec{F}$, силы реакции со стороны тел $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. Из условия моментов относительно точек приложения этих сил получаем

$$N_1 = 4F,$$
$$N_2 = 3F.$$

На тела со стороны стержня по третьему закону Ньютона действуют такие же по модулю силы. Тела начнут двигаться, когда эти силы превысят максимальные силы трения — $2kmg$ и kmg, т. е. тела сдвинутся при выполнении следующих условий.

Тело $2m$:

$$N_1 \geqslant 2kmg \quad \Rightarrow \quad F \geqslant \frac{kmg}{2}.$$

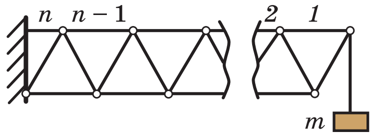
Тело m:

$$N_2 \geqslant kmg \quad \Rightarrow \quad F \geqslant \frac{kmg}{3}.$$

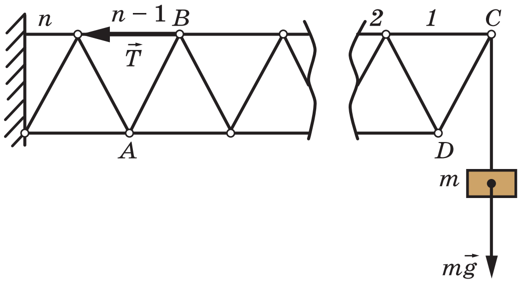
Отсюда следует, что при увеличении силы F сначала нарушается второе неравенство. Это значит, что первым сдвинется тело массой m при значении внешней силы $F = \frac{kmg}{3}$.

Часто в прикладной механике приходится рассматривать конструкции типа мостовых ферм и проводить расчёты прочности. Для этого необходимо уметь рассчитывать напряжения, возникающие в стержнях фермы. В связи с этим рассматривают равновесие не только всей фермы, но и каких-то её частей. Рассмотрим задачу.

Задача 2.3. К кронштейну, состоящему из одинаковых стержней, соединённых шарнирами, прикреплён груз массой m так, как это показано на рисунке. Определите силу натяжения $(n-1)$-го стержня. Весом частей кронштейна пренебрегите.



Решение. Рассмотрим равновесие части $ABCD$ кронштейна (см. рисунок). Внешними силами для этой части являются сила натяжения нити, равная силе тяжести груза (сама конструкция по условию массы не имеет), и силы в двух шарнирах — A и B.



Поскольку крепления всех стержней шарнирные, сила, действующая со стороны $(n-1)$-го стержня на шарнир B, направлена вдоль стержня. Поэтому условие моментов для части кронштейна $ABCD$ относительно шарнира A даёт уравнение

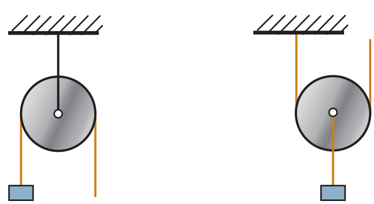
$$T\frac{\sqrt{3}l}{2} = mg\left(n - \frac{3}{2}\right)l,$$

где l — длина одного стержня. Отсюда получаем

$$T = \frac{mg(2n-3)}{\sqrt{3}}.$$

Ещё одним важным объектом прикладной механики является блок, позволяющий изменять направление силы или получить выигрыш в силе. Существуют подвижные и неподвижные блоки. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2.4. Имеются произвольные — неподвижные (левый рисунок) или подвижные (правый рисунок) — невесомые блоки и неограниченное количество невесомой верёвки. Используя такие блоки и верёвки, сконструируйте подъёмный механизм, дающий трёхкратный выигрыш в силе.



Решение. Неподвижный блок позволяет изменить направление приложения силы по сравнению с направлением подъёма груза, но не

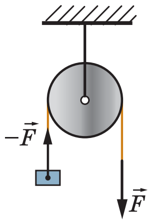


Рис. 1

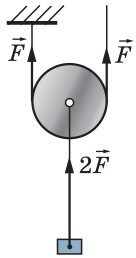


Рис. 2

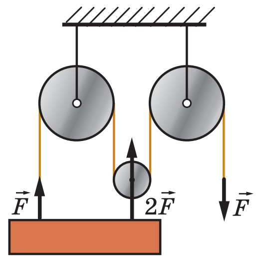


Рис. 3

меняет значение силы. Подвижный блок может изменить её значение. Действительно, если приложить к одному из концов верёвки, висящей на неподвижном блоке, силу F, то на другом конце верёвка будет действовать на груз такой же силой (см. рисунок 1). Это связано с тем, что сама верёвка по условию не имеет массы, и сумма сил, действующих на неё, должна равняться нулю.

Что касается подвижного блока, то он даёт двукратный выигрыш в силе, поскольку со стороны верёвки, переброшенной через блок, один конец которой натягивается силой $\vec{F}$, на блок действует сила $2\vec{F}$, и, следовательно, такая же сила действует на ось блока со стороны привязанной к ней верёвки, которая, в свою очередь, такой же силой действует на тело (см. рисунок 2).

Скомбинируем теперь подвижный и неподвижный блоки, чтобы обеспечить трёхкратный выигрыш в силе. Будем рассуждать, например, так. Для трёхкратного выигрыша в силе можно прикрепить к телу две верёвки, одна из которых та же, что и вытягивается внешней силой, а вторая верёвка привязана к оси подвижного блока, охватываемого первой верёвкой (см. рисунок 3). В результате, если верёвка движется под действием некоторой силы F, на массивную плиту действует сила $3F$.

2.3. Динамика механизмов

В динамике механизмов и их частей рассматриваются методы определения их ускорений. Основной задачей динамики механизмов является установление законов их движения. Рассматриваются также напряжения в звеньях механизмов, потери на трение и реакции в соединениях звеньев механизма. Исследования в области динамики машин связаны с расчётами напряжений в их элементах с целью обоснованного выбора запаса прочности, размеров и форм деталей механизмов.

Основой динамических методов прикладной механики является второй закон Ньютона и условия связей сил и ускорений различных тел, входящих в систему.

Для установления соотношений сил используется третий (при контактных взаимодействиях) или второй закон Ньютона (при наличии промежуточных тел: верёвок, нитей и т. д.). Связи между ускорениями устанавливаются кинематически.

В развитии прикладной механики можно выделить несколько периодов. Сначала это был период первичного изобретательства, когда были придуманы простые механизмы: подъёмники, мельницы, камнедробилки, ткацкие и токарные станки, паровые машины (Архимед, Витрувий, Галилей, Гук, Харгривс, Уатт и др.). Римский архитектор и механик Марк Витрувий дал и первое определение машины: «Машина есть сочетание соединённых вместе деревянных частей, обладающее огромными силами для передвижения тяжестей» [12]. Именно такой она осталась и сегодня, только перестала быть деревянной.

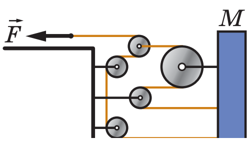
Во втором периоде, с начала XVIII до середины XIX в., на основе ньютоновской механики были заложены теоретические основы прикладной механики — метод Лагранжа, теории зубчатого зацепления и механизмов передачи движения. Здесь нужно назвать Эйлера, Лагранжа, Савари, Кориолиса. На основе работ Галилея и закона Гука была создана теория сопротивления материалов — сопромат, позволяющая проводить расчёты прочности машин и строительных конструкций.

Третий период развития прикладной механики — период построения фундаментальной теории и создания сложных машин и механизмов. Здесь нужно упомянуть теорию механизмов передачи движения (Чебышёв, Посселье), гидродинамическую теорию смазки (Грюблер), графоаналитический метод анализа движения и др. В это же время были созданы первые автомобили, использовавшие последние достижения теории: зубчатые и ременные передачи, дифференциалы, гидродинамические системы тормозов и др. (Ж. Ленуар, К. Бенц, О. Пеккер, Н. Отто). Машиностроение становится самостоятельной дисциплиной.

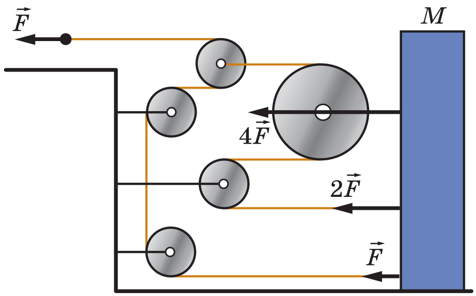
Четвёртый период развития прикладной механики длится от начала XX в. до наших дней. Это период интенсивного развития всех её направлений — кинематики механизмов, геометрии зубчатых передач, динамики машин и механизмов и др. Здесь нужно вспомнить фамилии выдающихся русских, советских и зарубежных учёных — Н. Е. Жуковского, С. А. Чаплыгина, И. И. Артоболевского, К. В. Фролова, М. Л. Новикова, Х. Альта, Г. Бегельзака, Р. Крауса и др.

Рассмотрим несколько примеров.

Задача 2.5. На стройке рабочие перемещают массивную плиту массой M с помощью системы блоков (см. рисунок), действуя на конец верёвки силой $\vec{F}$. Определите ускорение конца верёвки. Блоки и верёвки невесомы, верёвки нерастяжимы.



Решение. Поскольку верёвки невесомы, силы натяжения в любом сечении одной и той же верёвки одинаковы. А поскольку невесомы блоки, то силы натяжения верёвки, переброшенной через блок, и верёвки, прикреплённой к его оси, различаются вдвое (см. рисунок).



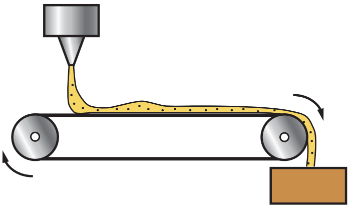
Отсюда заключаем, что на плиту действует сила $\vec{F}$ со стороны нижней верёвки, $2\vec{F}$ со стороны средней и $4\vec{F}$ со стороны верхней. Поэтому ускорение плиты

$$a = \frac{7F}{M}.$$

Определим ускорение точки приложения внешней силы к верёвке. Пусть плита сдвинулась на малое расстояние Δx. Тогда самая нижняя верёвка стала короче на Δx, верёвка от плиты до среднего блока стала также короче на Δx, самый большой блок передвинулся влево на Δx. Значит, самый верхний блок передвинулся влево на $3\Delta x$. Поэтому точка приложения внешней силы $\vec{F}$ переместилась на $7\Delta x$. Поэтому ускорение конца верёвки, к которому приложена внешняя сила, в семь раз больше ускорения плиты и составляет

$$a = \frac{49F}{M}.$$

В некоторых случаях при решении динамических задач удобно использовать законы сохранения. В некоторых задачах ставятся вопросы о скорости механизмов или о мощности их двигателей. Все такие задачи решаются с использованием закона сохранения (или изменения) механической энергии. Рассмотрим пример.



Задача 2.6. Горизонтальная лента транспортёра, движущаяся со скоростью $v = 1$ м/с, перемещает песок от бункера до пескоприёмника. Расход песка из бункера составляет $\mu = 20$ кг/с. Оцените мощность, которую должен развивать для этого двигатель транспортёра, считая, что мощность, необходимая для перемещения ленты транспортёра без песка, мала.

Решение. Из условия следует, что никакие потери мощности на трение в валках транспортёра учитывать не нужно. Поэтому основной источник потерь в данной системе — это разгон песчинок до скорости ленты и потери на трение песчинок о ленту (если бы трения песчинок о ленту не было, лента не смогла бы переместить песок).

За малое время Δt на ленту попадает песок массой $\mu\Delta t$, который лента разгоняет до своей скорости v, т. е. совершает работу

$$\Delta A = \frac{\mu \Delta t v^2}{2}.$$

Отсюда находим мощность, которую должен развивать транспортёр для разгона песка:

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mu v^2}{2}.$$

Очевидно, мощность потерь на трение песчинок о ленту такая же. Действительно, чтобы разогнать песок до своей скорости, лента должна переместиться на расстояние, равное удвоенному перемещению песчинок, откуда и следует полученное выше равенство. Поэтому мощность двигателя примерно равна

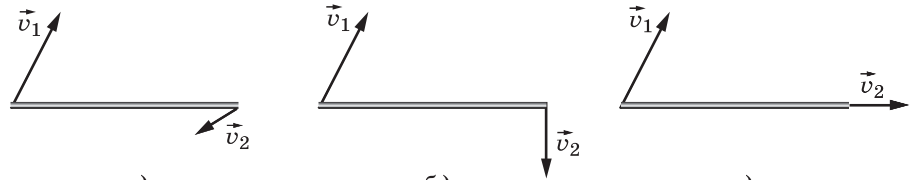
$$P = \mu v^2 = 20 \text{ Вт}.$$

Конечно, сделанная оценка мощности двигателя транспортёра существенно отличается от реального значения, поскольку основной причиной затраты мощности является работа против сил трения в валках, которая зависит от полного количества песка на ленте и её длины.

2.4. Кинематика механизмов

Кинематика механизмов была создана только в конце XIX в. (позже и динамики, и статики механизмов) в связи с развитием машиностроения. В этом разделе прикладной механики движение деталей механизма считается заданным и определяются параметры этого движения. Основная задача кинематики механизмов — определение положения звеньев механизма и его отдельных точек в любой момент времени, нахождение их линейных и угловых скоростей и ускорений. Решение этой задачи основывается на том, что при заданном движении одного или нескольких звеньев механизма остальные его звенья движутся определённым образом, обусловленным связями звеньев механизма. Эти связи приводят к некоторым ограничениям в возможном движении одних звеньев механизма относительно других или в согласовании движений различных звеньев механизма. Существует два таких ограничения, или согласования движений.

Пусть два звена механизма связаны жёстким недеформируемым стержнем. Тогда скорости связанных точек не могут быть произвольными. Очевидно,



а) б) в)

Рис. 2.3

условие их связи заключается в том, что проекции скоростей этих точек на направление самого стержня должны совпадать, поскольку в противном случае стержень должен деформироваться.

Например, для стержня, показанного на рисунке 2.3, движения а) и б) невозможны, движение в) возможно.

Важным следствием этого утверждения является то обстоятельство, что тела, связанные натянутой нерастяжимой верёвкой, движутся одинаково, если движение происходит вдоль верёвки (рис. 2.4). И у них одинаковые скорости и ускорения в любой момент времени.

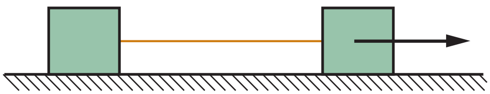
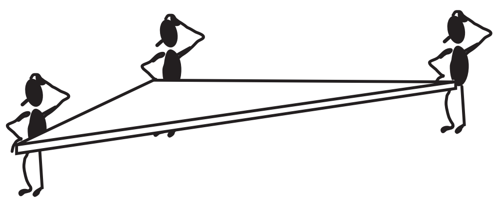


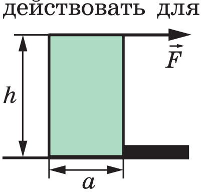
Рис. 2.4

Ещё один принцип согласования движений связанных тел заключается в том, что если два тела контактируют и отсутствует проскальзывание одного тела по поверхности другого, то скорости контактирующих точек тел равны друг другу. Этот принцип используется при установлении связи скоростей и ускорений тел.

Задачи для самостоятельного решения

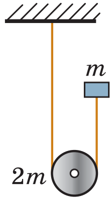
2.1. Имеется плоская массивная плита массой m в форме прямоугольного треугольника с отношением катетов $1:2$. Три человека удерживают плиту в горизонтальном положении за вершины (см. рисунок). Определите минимальные силы, с которыми каждый человек должен действовать для этого на плиту.

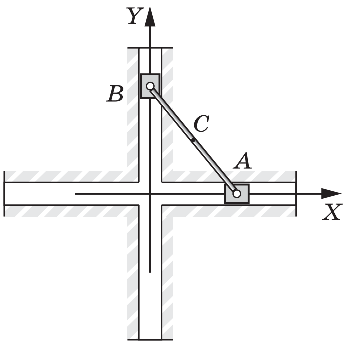




2.2. На горизонтальной поверхности около небольшой ступеньки стоит тело массой m в форме прямоугольного параллелепипеда, высота которого h, а в основании — квадрат со стороной a (см. рисунок). Какую минимальную силу F нужно приложить к телу, чтобы опрокинуть его?

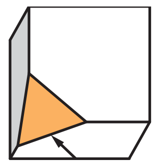
2.3. Подвижный блок, масса $2m$ которого сосредоточена в его оси, удерживают с помощью верёвки, один конец которой прикреплён к потолку, другой — к телу массой m. В некоторый момент тело отпускают. Определите ускорение тела.



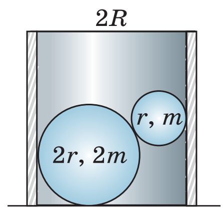


2.4. Плоский механизм, который называется линейкой эллипсографа, состоит из двух точечных «ползунов» A и B (деталей, способных перемещаться вдоль направляющих), связанных стержнем длиной l, шарнирно прикреплённым к ползунам (см. рисунок; ползуны — тёмные прямоугольники). Пусть ползуны движутся по закону $x_A(t) = l\cos\omega t$, $y_A(t) = 0$, $x_B(t) = 0$, $y_B(t) = l\sin\omega t$. По какой траектории движется середина стержня (точка C)? Каким будет ускорение точки C в тот момент, когда стержень AB наклонён к оси OX под углом 60°?

2.5. Из листа фанеры вырезали равносторонний треугольник массой m и поставили его в угол между тремя взаимно перпендикулярными поверхностями так, что треугольник касается своими сторонами всех трёх граней угла (см. рисунок). Какой минимальной горизонтальной силой нужно действовать на середину нижней стороны треугольника, чтобы он не двигался?

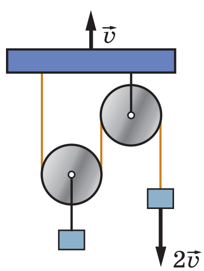


2.6. На столе стоит открытый тонкостенный цилиндр с радиусом основания R. В цилиндр помещают два шара с радиусами $2r$ и r и с массами $2m$ и m соответственно (см. рисунок). Смогут ли шары опрокинуть цилиндр, и если да, то при какой его максимальной массе?



2.7. Массивная верёвка была привязана за два конца в точках, находящихся на одинаковой высоте. Затем в некоторой точке к верёвке приложили силу, направленную вертикально вниз. Как при этом сместился центр тяжести верёвки?

2.8. В системе, изображённой на рисунке, правый груз перемещают вниз со скоростью $2v$; доску, к которой прикреплены блоки и один конец нити, перемещают вверх со скоростью v. Определите скорость и направление движения второго груза.



ГЛАВА

3

ПЕРЕДАЮЩИЕ И ИЗМЕНЯЮЩИЕ СИЛУ

Простые механизмы. Что они могут

3.1. Простые механизмы Архимеда

Применять механизмы для облегчения труда — в первую очередь при подъёме или переносе тяжестей — люди научились задолго до того, как были грамотно сформулированы физические принципы их действия. Простые механизмы служат для преобразования значения и направления силы в подъёмных и двигательных устройствах. Название «простые» эти механизмы получили потому, что в каждом из них используется единственный элемент, дающий выигрыш в силе или меняющий её направление. Обычно выделяют пять простых механизмов, предложенных Архимедом, которые, правда, по-разному описываются в различных источниках. В любом случае все простые механизмы основаны на двух основных — наклонной плоскости и рычаге — и представляют собой их различные модификации. Так, клин и винт представляют собой вариации наклонной плоскости; блок, безмен, лебёдка, вóрот — вариации рычага. Рассмотрим эти механизмы и основные принципы их работы.

3.2. Наклонная плоскость, клин, винт

Самые первые простые механизмы — наклонная плоскость, рычаг, клин, колесо, блок, лебёдка, винт — были освоены нашими предками ещё в глубокой древности. А великий математик, механик и инженер Архимед во II в. до н. э. построил теорию простых механизмов.

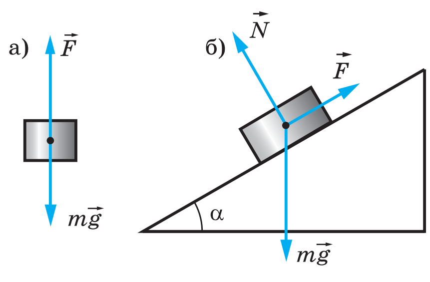


Рис. 3.1

Что же дают простые механизмы? Главное — они позволяют получить выигрыш в силе или изменение её направления при выполнении тех или иных действий.

Пусть, например, нам нужно поднять груз массой m на большую высоту. Ясно, что проще затащить его по пологой наклонной плоскости, чем поднять вертикально или по крутому подъёму, поскольку это требует меньшей силы. Действительно, если мы поднимаем груз вертикально (рис. 3.1, *а*), то внешняя сила должна быть не меньше силы тяжести груза:

$$F \geqslant mg.$$

Если же мы поднимаем груз по наклонной плоскости без трения (рис. 3.1, *б*), то на тело действуют три силы — внешняя сила, сила тяжести и сила реакции плоскости, направленная перпендикулярно её поверхности. В случае медленного подъёма тела внешняя сила должна превысить составляющую силы тяжести, направленную вдоль плоскости:

$$F \geqslant mg\sin\alpha,$$

т. е. может быть существенно меньшей. Естественно, при наличии трения о плоскость выигрыш в силе будет меньшим.

Задача 3.1. Во сколько раз меньшую силу F придётся приложить для того, чтобы затащить груз массой m по шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α, чем для того, чтобы вертикально поднять этот же груз? Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен k. При каком угле наклона плоскости выигрыш в силе будет максимальным?

Решение. В случае подъёма тела по шероховатой поверхности внешняя сила должна превысить сумму составляющей силы тяжести, направленной вдоль плоскости, и силы трения, которая на наклонной плоскости равна

$$F_{\text{тр}} = kmg\cos\alpha.$$

Поэтому минимальная сила, поднимающая тело по плоскости, равна

$$F = mg\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right).$$

Выигрыш в силе по сравнению с вертикальным подъёмом составляет

$$\frac{F_{\text{верт}}}{F_{\text{плоск}}} = \frac{1}{\sin\alpha + k\cos\alpha}. \qquad (*)$$

Максимум выражения (*) найдём, используя производную[1]. Отношение (*) максимально, когда минимален его знаменатель. Минимум выражения в знаменателе найдём, взяв производную от него по α и приравняв её к нулю:

$$\frac{d\left(\sin\alpha + k\cos\alpha\right)}{d\alpha} = \cos\alpha - k\sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \operatorname{arcctg} k.$$

Разновидностью плоскости является **клин**, представляющий собой твёрдую призму, рабочие поверхности которой сходятся под острым углом. Клин используется для разделения на части обрабатываемого предмета. Принцип действия клина заключается в том, что силы, возникающие на его боковых

[1] Если вы ещё не знакомы с этим понятием, пропустите конец примера 3.1.

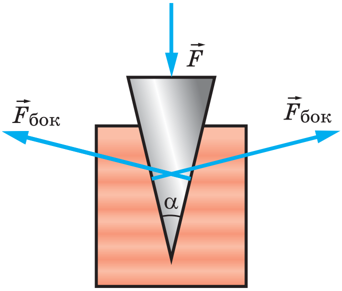


Рис. 3.2

поверхностях, гораздо больше вертикальной силы, вдавливающей клин в бревно (рис. 3.2). Клин и топор или каменное рубило как его разновидности используются человечеством десятки (а может быть, и сотни) тысяч лет.

Оценить силу, с которой клин действует на боковые поверхности, можно следующим образом. Поскольку ускорение клина мало, он практически находится в равновесии. Тогда сумма сил, действующих на клин — силы $\vec{F}$, вдавливающей клин в бревно, и сил $\vec{F}_{бок}$, действующих на клин со стороны боковых поверхностей и перпендикулярных этим поверхностям, — должна равняться нулю. Поэтому

$$2F_{бок}\sin(\alpha/2) = F,$$

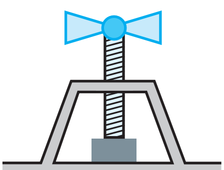
где α — угол схождения клина. Или

$$F_{бок} = \frac{F}{2\sin(\alpha/2)}.$$

Точно такая же сила действует со стороны клина на полено. Отсюда заключаем, что сила, разрывающая полено, существенно больше, чем сила, приложенная к клину.

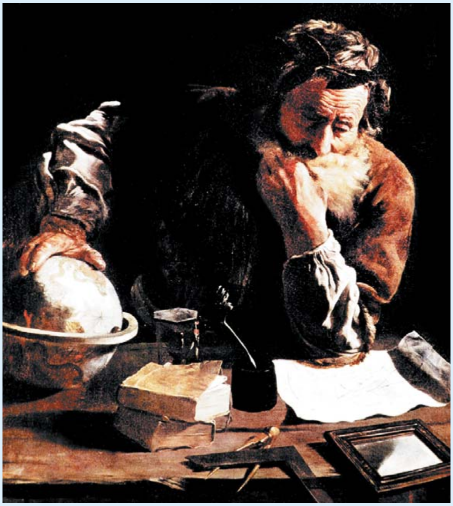
Ещё одной разновидностью наклонной плоскости является **винт**, позволяющий добиваться больших сил, действующих на соединяемые детали, при приложении к ним малых сил или малых моментов сил. Действительно, резьба винта представляет собой наклонную плоскость, многократно «обёрнутую» вокруг цилиндра. Поэтому, закручивая винт, мы развиваем значительные усилия в направлении его оси или добиваемся движения гайки или детали, в которой сделана резьба, по резьбе винта. Примерами использования винтовых соединений являются домкрат, тиски, болты с гайками, обеспечивающие большие силы соединения тех или иных деталей при небольших силах или моментах, их закручивающих. Несмотря на то что винт был придуман Архимедом ещё в III в. до н. э. (шнековый насос — улитка Архимеда), первое винтовое соединение элементов — винт и гайка — было запатентовано в Англии только в 1784 г.

Рассмотрим пример использования винта для ручного пресса, обеспечивающего значительный выигрыш в силе.



Задача 3.2. В винтовом прессе заготовка прижимается к опоре давящим штоком, который приводится в движение относительно рамы с помощью винта (см. рисунок). Шаг резьбы винта (расстояние между ближайшими бороздками) равен h. К рукоятке винта приложена пара сил, которая создаёт момент M

Архимед (287—212 гг. до н. э.) — древнегреческий математик, физик, механик, инженер, живший в III в. до н. э. в городе Сиракузы на острове Сицилия. Предвосхитил основные идеи математического анализа: сумел вычислить площадь поверхности и объём сферы, объём конуса, квадратуру параболы. Дал достаточно точную оценку числа π — отношения длины окружности к диаметру («архимедово число») и сумел оценить точность этого приближения: $223 / 71 < \pi < 22 / 7$.

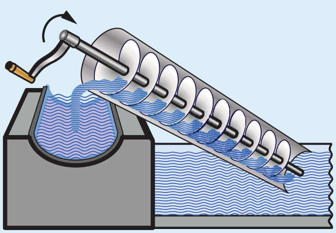


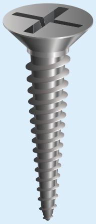
Открыл важнейший закон гидростатики (носящий его имя), согласно которому на тело, погружённое в жидкость, действует сила, равная весу вытесненной жидкости.

Важнейшим достижением Архимеда стала разработка теоретических основ прикладной механики, и мы по праву называем его создателем этой науки. Он построил теорию пяти простых механизмов: рычага, наклонной плоскости, блока, бесконечного винта и лебёдки. Простые механизмы Архимеда помогают человечеству более 2000 лет, причём некоторые практически без изменений со времён Архимеда. Так, улитка Архимеда (шнековый насос) работает в современном Египте при подъёме нильской воды на поля и в Нидерландах при осушении болот.

Известна и многократно описана в произведениях живописи и литературы история гибели Архимеда. Во время войны с Римом Архимед возглавил оборону своего родного города Сиракузы, сконструировав ряд боевых машин и катапульт, которые позволили отражать атаки римлян почти три года. Древний историк Полибий писал: «Такова была чудесная сила одного человека... римляне могли бы быстро овладеть городом, если бы кто-либо изъял из среды сиракузян одного старца» [13]. Тем не менее город пал, вместе с ним погиб и Архимед.

На картине известного итальянского художника Доменико Фетти, написанной в 1620 г., показаны разные ипостаси Архимеда: он здесь и математик, и механик, и астроном. А ещё — ремесленник и инженер.

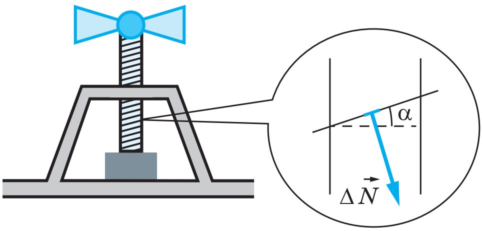




На рисунках показаны «улитка Архимеда» и обычный крепёжный винт (шуруп), который дал человечеству Архимед.

относительно оси винта. С какой силой шток прижимает заготовку к опоре? Трение между всеми поверхностями отсутствует.

Решение. Пусть α — угол подъёма резьбы. На шток действуют: искомая сила реакции $\vec{N}$ со стороны заготовки, направленная вертикально



вверх, момент внешних сил и сила реакции со стороны резьбы. Пусть на малом интервале Δx длины резьбы на шток действует сила реакции $\Delta\vec{N}$, перпендикулярная резьбе (перпендикулярная, так как нет трения; см. рисунок). Сумма вертикальных проекций силы $\Delta\vec{N}$, действующих на все участки, компенсирует силу $\vec{N}$ со стороны заготовки; проекции силы $\Delta\vec{N}$ на ось, перпендикулярную оси заготовки, создают момент, компенсирующий момент M внешних сил. Поэтому

$$N = \frac{\Delta N \cos\alpha}{\Delta x} l,$$

$$M = \frac{\Delta N \sin\alpha}{\Delta x} lR,$$

где l — длина резьбы, R — радиус штока. Разделив первое выражение на второе, получим

$$M = NR\,\mathrm{tg}\,\alpha. \qquad (*)$$

С другой стороны, для каждого участка резьбы длиной Δx справедливы равенства

$$\Delta x = \frac{\Delta l}{\cos\alpha}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta h}{\sin\alpha},$$

где Δl и Δh — проекции рассматриваемого участка резьбы на перпендикулярное и продольное направления. Поэтому суммирование таких проекций по одному витку резьбы даёт

$$2\pi R\,\mathrm{tg}\,\alpha = h,$$

где h — шаг резьбы (расстояние между соседними бороздками).

Теперь из формулы (*) получаем

$$N = \frac{2\pi M}{h}.$$

Из этого выражения следует, что, используя резьбу с маленьким шагом, можно получить существенный выигрыш в силе (который, однако, не может быть бесконечно большим даже при $h \to 0$, так как такую нагрузку не выдержит резьба). Из-за значительного выигрыша в силе рассмотренная конструкция используется в механических домкратах.

Наклонную плоскость применяли в строительстве с самых древних времён. Большинство современных историков уверены, что строительство пирамид в Древнем Египте (4—5 тысяч лет назад) и/или подобных им храмов — зиккуратов в Шумере и Вавилоне (знаменитая Вавилонская башня) велось при помощи пандусов — прямых или спиральных наклонных плоскостей, по которым затаскивали на большую высоту тяжёлые каменные блоки или другие строительные материалы и конструкции.

С наклонной плоскостью можно провести ряд простых и красивых экспериментов. Рассмотрим один из них.

Экспериментальная задача 3.1. Имеются наклонная плоскость, тело с крючком, которое, будучи положенным на плоскость, остаётся в покое, школьный динамометр, транспортир. Какую минимальную силу необходимо приложить к телу, чтобы сдвинуть его вверх по плоскости? Под каким углом эту силу нужно прикладывать?

Решение[1]***.*** Расположите тело на плоскости, а затем сдвигайте его вверх по плоскости, прикладывая к телу внешнюю силу со стороны динамометра. Измерьте зависимость сдвигающей силы от угла её приложения. Постройте график. Попробуйте ответить на вопрос: почему сила, необходимая для сдвига тела, минимальна не тогда, когда направлена параллельно плоскости, а тогда, когда приложена под некоторым углом? Как этот угол связан с углом наклона плоскости и коэффициентом трения? Если у вас не получится ответить на эти вопросы, посмотрите решение задачи 11.7 в главе 11.

[1] В экспериментальных задачах мы будем стараться использовать самое простое оборудование, в качестве которого могут быть использованы подручные средства. Что касается решений, то мы будем описывать их очень кратко, предоставив вам возможность самостоятельно выстроить стратегию измерения.

3.3. Рычаг, блок, ворот

Если необходимо сдвинуть с места тяжёлый камень, то это сделать проще, если подковырнуть его длинной палкой, опирающейся на некоторый предмет, причём с разными расстояниями от предмета до камня и от предмета до точки приложения силы (рис. 3.3). А это уже рычаг с разными плечами, который позволяет получить выигрыш в силе.

Если перекинуть верёвку через высокую ветку дерева и потянуть вниз, то можно поднять на высоту достаточно большой груз, привязанный к другому концу верёвки. Вот вам и блок, фактически представляющий собой равноплечий рычаг, позволяющий менять направление силы. Давайте рассмотрим принципы работы рычага и блока.

Закон рычага является отражением **правила моментов** (см. главу 2) и показывает, что рычаг, массой которого можно пренебречь и к которому приложены две силы — $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 3.4), будет находиться в равновесии при выполнении условия

$$F_1 l_1 = F_2 l_2, \qquad (3.1)$$

где l_1 и l_2 — плечи сил. Таким образом, в равновесии действующие на рычаг силы обратно пропорциональны их плечам. Поэтому с помощью рычага можно получить реальный выигрыш в силе, т. е. меньшей силой уравновесить или даже преодолеть силу бóльшую.

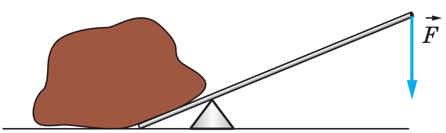


Рис. 3.3

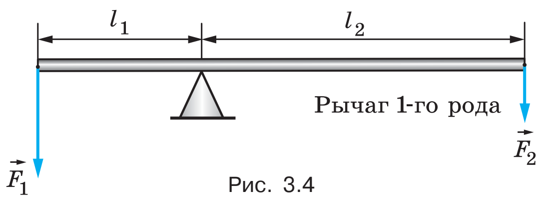
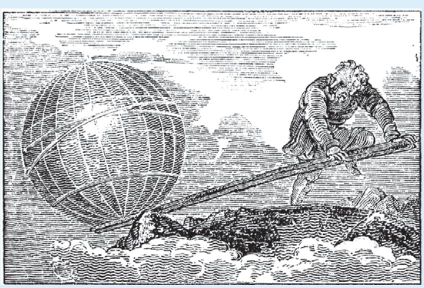


Рис. 3.4



Считается, что принцип работы рычага первым сформулировал Архимед. Он же изобрёл на основе рычагов и блоков множество сложных механизмов. Архимед был так впечатлён своей теорией рычага, что, по легенде, даже заявлял: «Дайте мне точку опоры (закреплённую ось вращения рычага), и я переверну Землю!» [12], что, конечно, является преувеличением.

Различают **рычаги первого и второго рода**. Рычагом первого рода называют рычаг, опора которого расположена между точками приложения сил, а силы направлены в одну сторону. Это, например, коромысло весов, ножницы, колодезный журавль и др. На рисунке 3.4 показан рычаг первого рода.

У рычага второго рода опора расположена по одну сторону от точек приложения сил, а силы направлены противоположно друг другу (рис. 3.5). Рычаги второго рода — это тачки, щипцы для раскалывания орехов, двери и др. Конечно, возможности рычага велики, но всё же не бесконечны.

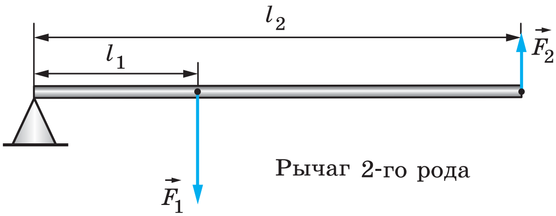


Рис. 3.5

Давайте оценим, какой длины рычаг понадобился бы Архимеду, чтобы сдвинуть Землю.

Задача 3.3. Оцените[1] длину рычага, с помощью которого Архимед мог бы сдвинуть Землю с её орбиты, опирая рычаг, например, о Луну (ему нужна была точка опоры, мы ему её «дали»). Считайте, что для того чтобы сдвинуть Землю, надо приложить силу, превышающую силу притяжения Земли к Солнцу. Считайте также, что максимальная сила, которую способен приложить к рычагу немолодой Архимед, составляет $P = 100$ Н (сила притяжения к земле 10-литрового ведра).

Решение. Длина рычага должна превышать расстояние от Земли до Луны, примерно равное 0,4 млн км, во столько же раз, во сколько раз сила притяжения Земли к Солнцу

$$F = G\frac{mM}{R^2}$$

превышает «силу действия Архимеда» P (здесь $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг — масса Солнца, $m = 6 \cdot 10^{24}$ кг — масса Земли, $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м — расстояние от Земли до Солнца, $G = 7 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2) — гравитационная постоянная). Используя условие равновесия рычага (3.1) и выполняя вычисления, находим длину L рычага, с помощью которого Архимед мог бы сдвинуть Землю:

$$L \sim 2 \cdot 10^{29} \text{ м},$$

что примерно в тысячу раз превышает размеры Вселенной (!). Так что рычагу Архимеда просто не хватит места в нашей Вселенной.

[1] «Оценить» означает «сделать примерные вычисления». Не пытайтесь решить задачу точно. Надо учесть только главный эффект, сделать правильные допущения и примерные вычисления. Считается, что ошибка в оценке в 2–3 раза вполне допустима.

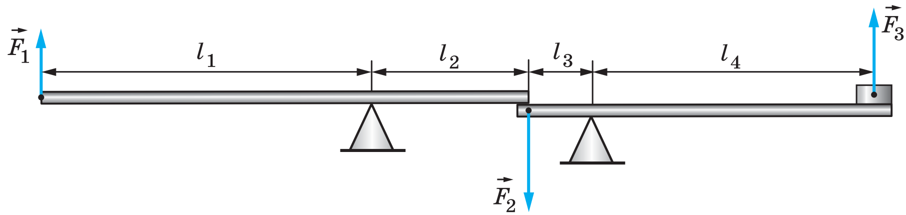


Рис. 3.6

Итак, рычаг может дать сколь угодно большой выигрыш в силе, но и здесь имеются ограничивающие условия. Простая геометрия! Технически очень сложно или даже совсем невозможно сделать рычаг с плечами, различающимися по длине в сотни или даже хотя бы в десятки раз (как в задаче 3.3). А можно ли добиться уменьшения геометрических ограничений? Оказывается, можно. Но для этого придётся использовать более сложные устройства, состоящие из комбинаций нескольких простых механизмов. Например, можно сделать двойной рычаг (рис. 3.6). Если приложить к левому концу левого рычага силу F_1, на левый конец правого рычага будет действовать сила $F_2 = F_1(l_1/l_2)$, а на груз, лежащий на правом конце, будет действовать сила

$$F_3 = F_2\frac{l_3}{l_4} = F_1\frac{l_1}{l_2}\frac{l_3}{l_4}.$$

Таким образом, **передаточное отношение** (отношение сил, или отношение плеч) составного рычага равно произведению передаточных отношений его составных частей. А это может дать дополнительный выигрыш. Действительно, пусть длины рычагов-частей одинаковы и их передаточные отношения также одинаковы и равны $l_1 / l_2 = l_3 / l_4 = 4$. Тогда выигрыш в силе от использования двойного рычага составит $F_3 / F_1 = 16$ при его общей длине $10l_4$. Если бы мы хотели использовать одиночный рычаг с тем же плечом «снятия» силы и тем же выигрышем в силе, его длина составила бы $17l_4$, т. е. налицо значительная «экономия» размеров. А можно сделать и тройной, и четверной рычаг — и получить многократный выигрыш в силе с помощью достаточно компактных механизмов.

Множественные рычаги могут также изменять направление силы: чтобы поднять груз с помощью одиночного рычага, на другой его конец нужно действовать силой, направленной вверх, а с помощью двойного — вниз.

Иногда приходится иметь дело с рычагом, массой которого пренебречь нельзя. В этом случае в условие равновесия рычага (правило моментов относительно опоры) необходимо включать и момент силы тяжести, действующей на сам рычаг. Рецепт вычисления момента силы тяжести заключается в том, что суммарную силу тяжести нужно приложить к точке, которая называется центром тяжести, а затем вычислять момент так, как будто эта сила является сосредоточенной. У симметричных тел центр тяжести располагается в геометрическом центре, у плоского треугольника — в точке пересечения медиан. Если же тело не обладает симметрией, то положение его центра тяжести нам заранее неизвестно и его следует находить, используя те или иные условия задачи. Рассмотрим такую задачу.

Задача 3.4. Неоднородное бревно длиной l можно уравновесить в горизонтальном положении на подставке, находящейся на расстоянии l_1 от его толстого конца. Если подставка находится посередине и на тонкий конец положить груз массой m, то бревно снова будет в равновесии. Определите массу бревна.

Решение. Из условия заключаем, что центр тяжести бревна находится на расстоянии l_1 от его толстого конца, причём $l_1 < l/2$, поскольку центр тяжести будет находиться ближе к толстому (более массивному) концу бревна. Поэтому если бревно опирается на подставку серединой, то момент силы тяжести относительно центра равен $M(l/2 - l_1)$, и условие равенства нулю суммы моментов относительно опоры, расположенной в центре бревна, имеет вид

$$m\frac{l}{2} = M\left(\frac{l}{2} - l_1\right).$$

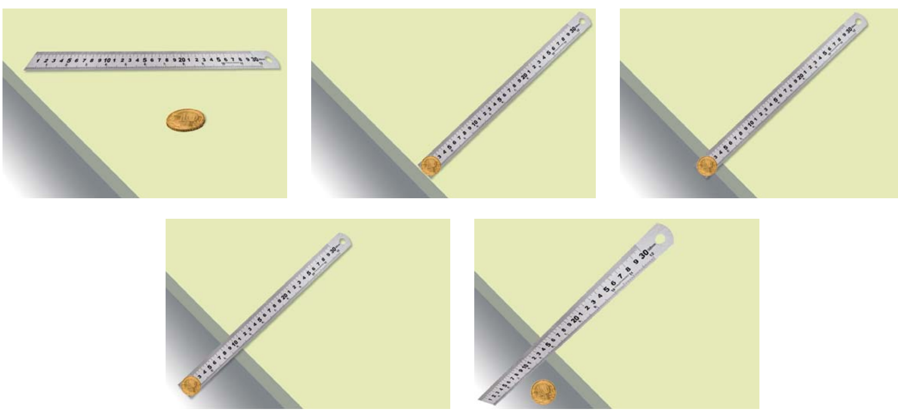
Отсюда можем выразить массу бревна:

$$M = \frac{ml}{l - 2l_1}.$$

С рычагами можно придумать множество самых разных экспериментальных задач, которые можно решить, пользуясь только подручными средствами. Рассмотрим две задачи.

Экспериментальная задача 3.2. Имеется школьная линейка длиной около 30 см, монета 10 р. и лабораторный стол. Как можно, используя только это оборудование, измерить массу линейки? Масса десятирублёвой монеты $m = 5{,}6$ г.

Решение. Положим линейку на край стола перпендикулярно этому краю, на её конце разместим десятирублевую монету и будем аккуратно двигать линейку к краю стола. В некоторый момент линейка



начнёт переворачиваться относительно края. В этот момент ещё будут выполняться условия статики (и в частности, уравнение моментов относительно края стола), а с другой стороны, сила реакции стола будет сосредоточена на самом его краю и не даст вклад в это уравнение. Поэтому для данного момента времени

$$mgl_1 = Mgl_2,$$

где M — масса линейки, l — её длина, l_1 — расстояние от края стола до центра монеты, l_2 — расстояние от края стола до середины линейки. Отсюда

$$M = \frac{ml_1}{l_2}.$$

Измерив расстояния l_1 и l_2 в момент переворота линейки и зная её длину, можно определить массу линейки.

Экспериментальная задача 3.3. Рассмотренную задачу 3.2 можно усложнить: взять ту же линейку и с помощью клея или двустороннего скотча приклеить к одному её концу утяжелитель (например, гайку), масса которого сравнима с массой линейки. Как в этом случае с помощью монеты с известной массой ($m = 5{,}6$ г) и края стола измерить массу несимметричной линейки?

Попробуйте самостоятельно сформулировать идею измерений (с исключением неоднородности линейки), получите расчётные формулы и определите массу линейки с утяжелителем.

Одной из разновидностей равноплечего рычага является **блок.**

Блоком называется колесо с жёлобом, которое может вращаться вокруг своей оси.

Блоки могут быть **неподвижными** и **подвижными**. Неподвижный блок крепится за ось к некоторой неподвижной поверхности. Через блок перекидывается верёвка, к одному из концов которой прикрепляется груз, а к другому прикладывается некоторая сила, которая через верёвку действует на груз. Неподвижный блок не даёт выигрыша в силе (рис. 3.7). Его можно рассматривать как рычаг с равными плечами. Но неподвижный блок позволяет изменить направление действия силы и сделать манипуляции с грузами более удобными. Например, при подъёме груза гораздо проще перебросить верёвку через блок и тянуть её вниз, чем подняться выше груза и тянуть верёвку с грузом вверх.

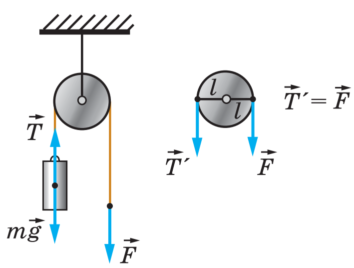


Рис. 3.7

Подвижный блок висит на верёвке, один из концов которой крепится к неподвижной поверхности, другой — удерживается некоторой силой, а к оси блока подвешивается груз (рис. 3.8). В этом случае в равновесии, как это доказано в главе 2, сила, удерживающая конец верёвки, вдвое меньше силы натяжения верёвки, удерживающей груз. Поэтому для медленного поднимания груза к верёвке, тянущей блок, нужно приложить силу, вдвое меньшую силы тяжести груза.

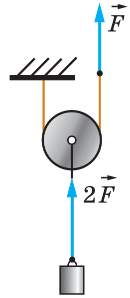


Рис. 3.8

Обычно подвижный блок используют вместе с неподвижным, как показано на рисунке 3.9. В таком случае выигрыш в силе дополняется преимуществом удобного направления приложения этой силы. Ещё в древности были изобретены сложные конструкции, включающие взаимодействующие блоки и рычаги, позволяющие получить не двукратный, а многократный выигрыш в силе. Если, например, собрать конструкцию, показанную на рисунке 3.10, мы получим четырёхкратный выигрыш в силе.

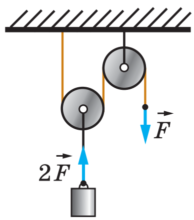


Рис. 3.9

А вот получить «нечётный» выигрыш в силе гораздо труднее. В главе 2 рассмотрен пример, в котором мы выигрываем в силе в 3 раза. А можно ли выиграть в силе в 5 раз?

Рассмотрим следующую задачу.

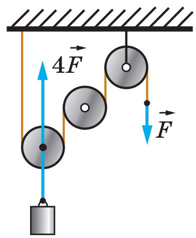


Рис. 3.10

Задача 3.5. Как, используя подвижные и неподвижные блоки, получить выигрыш в силе в 5 раз? То есть необходимо сконструировать механизм так, чтобы если один («входной») конец верёвки тянут с силой $\vec{F}$, то другой («выходной») участок верёвки был бы натянут с силой $5\vec{F}$.

Решение. Одна из возможных комбинаций подвижных и неподвижных блоков, дающая выигрыш в силе в 5 раз, показана на рисунке 3.11. Самую правую верёвку тянут с силой $\vec{F}$ вниз. Эта верёвка переброшена через большой блок, а затем после огибания нижнего блока прикреплена к оси большого блока. К этой же оси прикреплена другая верёвка, которая переброшена через верхний блок, а затем прикреплена к оси нижнего блока. Давайте посмотрим, как эта конструкция работает.

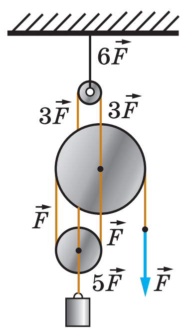


Рис. 3.11

Большой блок тянет вниз суммарная сила $3\vec{F}$ (две силы натяжения по бокам блока и ещё одна на оси). А поскольку блок невесом, сумма сил, которые на него действуют, должна равняться нулю. Поэтому верёвка, которая держит большой блок, натянута с силой $3F$. К нижнему блоку приложена сила $5F$, направленная вверх. Поэтому сила натяжения нижней верёвки равна $5F$.

Рассмотренная конструкция обладает и достаточно сложной кинематикой. Установите связи между скоростями разных верёвок. Пусть, например, скорость перемещения вниз конца правой нити равна v. Определите скорость подъёма груза и скорость большого блока (для груза ответ достаточно очевиден — $5v$; в любом другом случае нарушался бы закон сохранения энергии. Большой блок имеет точно такую же скорость, но направленную вниз).

Ещё один важнейший простой механизм, много тысяч лет служащий человечеству, — колесо, которое представляет собой круглый, свободно вращающийся или закреплённый на оси цилиндр, позволяющий поставленному на него телу катиться, а не скользить. Колесо позволяет движущей транспортное средство силе преодолевать не силу трения скольжения, а силу трения качения, которая обычно во много раз меньше.

Колесо известно людям уже несколько тысячелетий. Самыми ранними (V тыс. до н. э.) считаются колёса игрушечных тележек, найденных около румынского города Яссы [14]. А на керамическом горшке IV тыс. до н. э., найденном возле польской деревни Броночице, изображены колёсные повозки, запряжённые быками. К этому же времени относятся модели колёс, найденные на Северном Кавказе, в поселениях так называемой майкопской культуры. Таким образом, можно утверждать, что самое древнее колесо в истории человечества появилось в эпоху неолита в Восточной Европе.

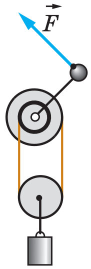
А вот древним египтянам или шумерам — создателям древнейших человеческих цивилизаций — в это время колесо ещё не было известно. Пирамиды египтяне строили, волоком затаскивая каменные блоки по наклонной плоскости.

Ещё один способ получить выигрыш в силе — это использование дифференциального блока, или ворота. В широком смысле воротом называют рычаг, создающий большой вращательный момент за счёт большого плеча.

Существует целый ряд устройств, использующих принцип ворота, — колодец (рис. 3.12), отвёртка, велосипед и др. Частным случаем ворота является дифференциальный блок — механизм, представляющий

Рис. 3.12

собой два блока, насаженные на одну ось и вращающиеся вместе. Блоки должны иметь разный диаметр (от англ. *difference* — различие). В результате при вращении большего колеса на меньшем возрастает усилие и уменьшается скорость движения пропорционально отношению радиусов блоков. Рассмотрим задачу.



Задача 3.6. Дифференциальный ворот состоит из двух блоков радиусами r и $2r$, насаженных на одну ось и склеенных между собой. На блоки ворота в противоположных направлениях намотана верёвка, на которой висит подвижный блок, радиус которого подобран так, что свободные концы верёвки вертикальны. К оси подвижного блока прикреплён груз массой m. Ручку ворота, находящуюся на расстоянии $4r$ от оси ворота, вращают с угловой скоростью ω так, как показано на рисунке. С какой скоростью поднимается груз? Какую силу необходимо прикладывать к ручке ворота, чтобы груз поднимался равномерно? Трения нет, все блоки невесомы.

Решение. Чтобы подъём груза происходил равномерно, удвоенная сила натяжения верёвки должна равняться силе тяжести груза. Отсюда находим силу натяжения верёвки:

$$T = \frac{mg}{2}.$$

Так как ворот вращается равномерно, сумма моментов сил, приложенных к блоку, должна равняться нулю:

$$Tr + F4r - T2r = 0,$$

где F — сила, приложенная к ручке ворота. Отсюда находим:

$$F = \frac{T}{4} = \frac{mg}{8}.$$

Найдём теперь скорость движения груза. Если ворот вращается с угловой скоростью ω, за время Δt на большой блок ворота наматывается верёвка длиной $\Delta l_1 = 2r\omega\Delta t$, с малого блока сматывается верёвка длиной $\Delta l_2 = r\omega\Delta t$. Поэтому верёвка, на которой висит подвижный блок, становится короче на длину

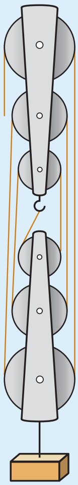
$$\Delta l_1 - \Delta l_2 = r\omega\Delta t,$$

а подвижный блок поднимается на половину этой длины:

$$\Delta x = \frac{\Delta l_1 - \Delta l_2}{2} = \frac{r\omega\Delta t}{2},$$

где Δx — расстояние, на которое поднялся блок (а следовательно, и груз) за время Δt. Отсюда находим скорость движения вверх груза (которая равна скорости поднятия блока):

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{r\omega}{2}.$$



В древних средиземноморских хрониках сохранилась история о том, как Архимед спустил на воду многопалубный корабль «Сиракузия», который царь Сиракуз Гиерон строил в качестве подарка египетскому царю Птолемею. Для строительства корабля была построена верфь, соединённая с морем небольшим каналом. Строители не рассчитали и сделали канал меньше, чем нужно. В результате корабль никак не удавалось спустить на воду. Тогда Архимед изготовил множественный блок — полиспаст, с помощью которого он смог выполнить эту работу усилием одной своей руки [15]. В настоящее время существуют такелажные блоки-полиспасты, использующиеся на складах для подъёма и переноски тяжёлых грузов.

Полиспаст Архимеда не сохранился, и потому многие физики пытались его реконструировать. Одним из них был Галилео Галилей, который в своей книге «Механика» привёл чертёж, показанный на рисунке [9].

Задача 3.7. По чертежу Галилея (см. рисунок в синей рамке) сконструируйте полиспаст. Используйте блоки (см. рисунок слева), которые продаются в хозяйственных магазинах, и верёвку. Сначала оцените теоретически, а затем измерьте экспериментально выигрыш в силе, который обеспечивает данная конструкция. Рассчитайте также, насколько поднимется груз, если вытянуть верёвку на длину Δl.

Решение. В разделе «Ответы» приведены ответы на вопросы.

И последнее, о чём стоит сказать в связи с простыми механизмами, придуманными для человечества Архимедом и другими замечательными (в основном неизвестными) инженерами. Во времена промышленной революции XVIII в. всем стало ясно, что простые механизмы могут очень и очень много, несмотря на то что они «простые». И каждый ремесленник и инженер должен знать их, чтобы использовать в своей работе. В изданной в Англии в 1728 г. (через год после смерти Ньютона) книге «Циклопедия, или Всеобщий словарь ремёсел и наук» [16] дана классификация и древних простых механизмов, и механизмов, придуманных уже в Новое время.

На рисунке 3.13 показана эта классификация. Здесь есть и рычаги, и блоки, и клин Архимеда, и безмен Галилея, и некоторые механизмы Гука, циклоидальный маятник Гюйгенса и многое-многое другое. И даже знаменитый рисунок Симона Стевина, изображающий цепь шаров на наклонной плоскости и подтверждающий сохранение энергии. Так что изучать прикладную механику нужно было и в XVIII веке... Нужно и сейчас. Нужно будет и в будущем. Ведь человечеству, несмотря на информационные технологии и интернет, всегда будет нужно двигать, поднимать, удерживать, перемещать. Физически, не виртуально. И для этого нам всегда будет нужна механика. Впрочем, об этом мы ещё поговорим в последней главе этой книги.

А сейчас о том, как она будет далее построена. Мы тоже дадим классификацию современных механизмов по функциональным признакам и рассмотрим:

- механизмы, передающие и преобразующие движение, — шарниры и передачи (главы 4 и 5);
- механизмы, создающие движение и преобразующие энергию, — двигатели и генераторы электроэнергии (главы 6 и 7);
- гидравлические механизмы и системы (глава 8);
- механизмы, использующие колебательное и вращательное движение (главы 9 и 10), а также роль трения и в жизни человечества, и в технике. И ещё мы обсудим (правда, совсем кратко) замечательную науку о деформациях тел, пределах их прочности и упругости — сопротивление материалов (сопромат), без которой не обходятся никакие инженерные и строительные расчёты.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Находясь на одной чаше неравноплечих весов, тело уравновешивается грузом массой m_1, на другой — грузом массой m_2. Определите массу тела. Массу весов не учитывайте.

3.2. На неравноплечем рычаге, опирающемся на точечную опору, уравновешены два стакана с водой. Расстояние между центрами стаканов равно L. Если перелить из одного стакана в другой порцию воды массой m, то

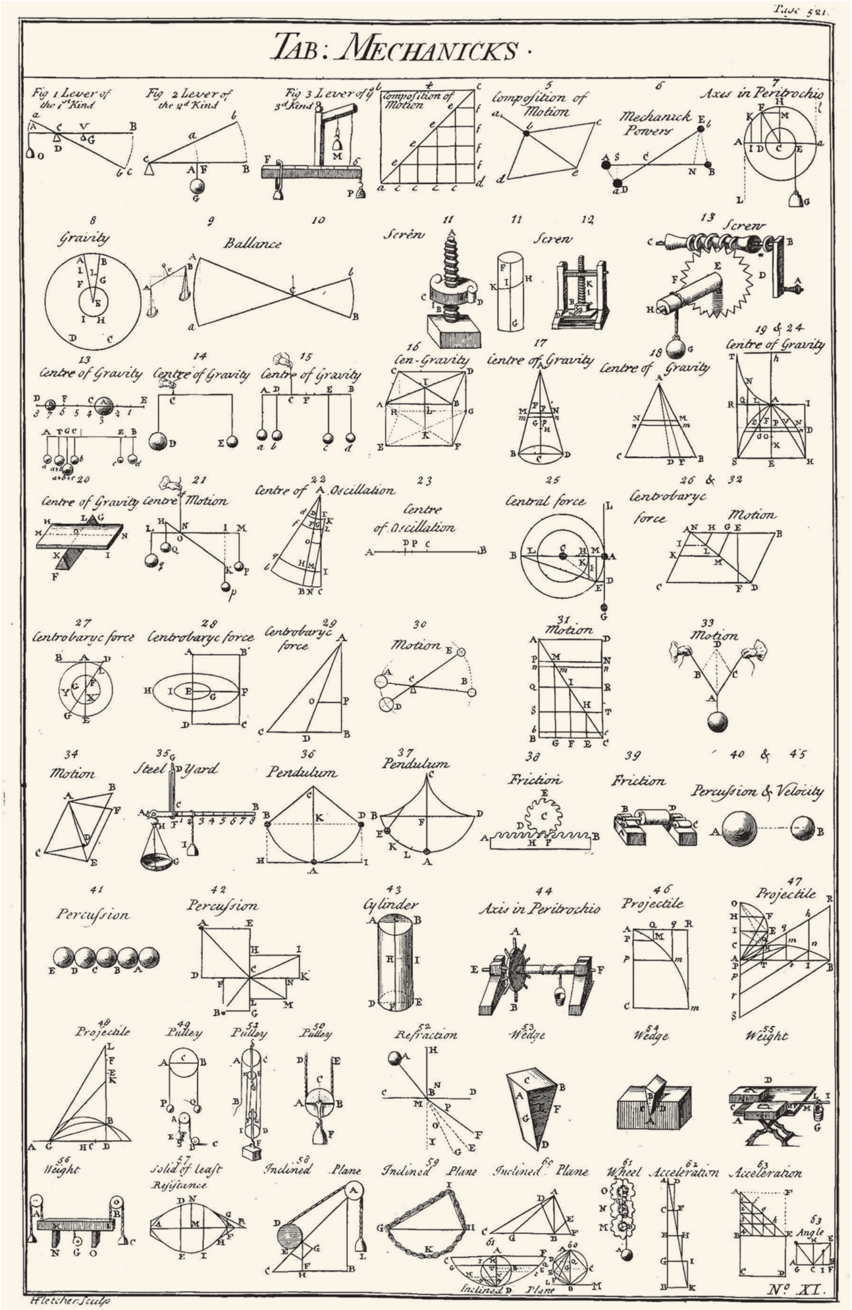
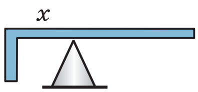


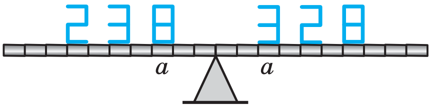
Рис. 3.13

для сохранения равновесия рычага опору нужно сдвинуть на расстояние l. Определите массу воды в обоих стаканах. Массой рычага и стаканов можно пренебречь.

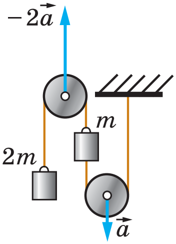
3.3. Конец однородного стержня длиной l согнули под прямым углом так, что длина согнутого участка составляет четвёртую часть длины стержня. На каком расстоянии x от места сгиба нужно расположить точечную опору, чтобы стержень находился в равновесии?



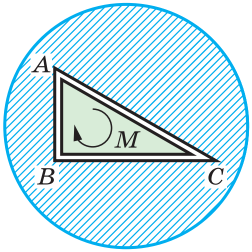
3.4. Из 34 одинаковых стержней длиной a и массой m изготовлены макеты двух чисел: 238 и 328 (каждое «звено» каждой цифры — один стержень). Макеты чисел расположили на коромысле равноплечих весов длиной $20a$ так, как это показано на рисунке. Какое из чисел перевесит и почему? Какой дополнительный груз нужно расположить на конце другого плеча весов, чтобы восстановить равновесие?



3.5. На рисунке показана система, состоящая из двух тел массами m и $2m$, связанных нерастяжимой и невесомой нитью (см. рисунок), второй конец которой прикреплён к потолку, и двух невесомых блоков. Ускорения блоков известны, равны a и $2a$ и направлены противоположно. Какими силами нужно действовать на блоки, чтобы сообщить им такие ускорения? Силу тяжести тел не учитывайте.



3.6. В ряде случаев шлицы (углубления или пазы в головках крепёжных изделий — винтов, болтов и т. д.) должны иметь нестандартную форму. Рассмотрите шлиц в виде прямоугольного треугольника с катетами $AB = a$ и $BC = 3a/2$. В шлиц вставлен ключ, зазоры между сторонами которого и сторонами шлица малы. К ручке ключа приложены две силы (пара сил), создающие момент M. Определите силы, с которыми ключ действует на грани шлица. Трение не учитывайте.



ГЛАВА 4

МЕХАНИЗМЫ, РАЗРЕШАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ

Подвижное соединение деталей — основа машиностроения

4.1. Шарниры — основа машиностроения

При конструировании движущихся механических устройств часто приходится сталкиваться с необходимостью такого соединения их деталей, которое позволяло бы им вращаться друг относительно друга. В некоторых случаях необходимость такого вращения связана с целью данного устройства, как, например, в дверной петле. В некоторых случаях подвижное соединение снимает ненужные напряжения в устройстве (так, подвижные соединения частей прочностных ферм железнодорожных мостов уменьшают внутренние напряжения в ферме).

Соединение, которое позволяет частям устройства вращаться друг относительно друга, называется **шарнирным** или **шарниром** (от немецкого *Scharnier* или французского *charnière*, означающих дверную петлю).

Различают два вида шарниров — цилиндрический шарнир (рис. 4.1), допускающий независимое вращение деталей устройства вокруг фиксированной оси, и сферический (рис. 4.2), допускающий независимое движение деталей относительно любых осей, проходящих через некоторую точку. При этом в некоторых случаях шарнир конструируется так, что он может перемещаться в небольших пределах по отношению к одной из соединяемых частей. В этом случае говорят о шарнирно-подвижном соединении частей устройства.

Но шарниры выполняют и другие функции. При создании движущихся машин или механизмов необходимо передавать вращение от одной части машины к другой (например, от двигателя к колёсам). Или превращать одно движение в другое (например, поступательно-возвратное движение

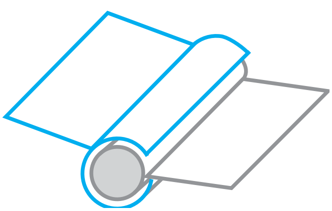


Рис. 4.1

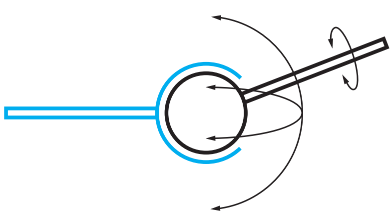


Рис. 4.2

поршня двигателя во вращение его вала). Конечно, рассмотренные выше шарниры не могут этого делать, поскольку разрешают свободное вращение одних частей машины относительно других. Поэтому задачи по передаче вращения решают совершенно другие устройства, которые, однако, также называют шарнирами.

Среди шарниров, передающих движение, следует назвать зубчатую передачу, карданный шарнир, кривошипно-шатунный механизм, дифференциал и многие другие. Шарнирам, передающим движение, посвящена глава 5. Здесь детально рассмотрим шарниры, разрешающие свободное вращение одних частей устройства относительно других.

4.2. Цилиндрический шарнир

Цилиндрический шарнир представляет собой простейшее шарнирное соединение, которое позволяет одному или нескольким телам совершать свободное вращение относительно фиксированной оси. Конструируется цилиндрический шарнир так: тела с просверлёнными отверстиями (или с цилиндрическими втулками) надеваются на стержень — ось шарнира — и могут вращаться независимо друг от друга вокруг этого стержня.

Рис. 4.3

Простейшим примером цилиндрического шарнира являются дверные петли (рис. 4.3). Шарнирно скреплены друг с другом ножницы, пассатижи и т. п.

Дверные петли появились 4—5 тыс. лет назад вместе с первыми построенными человеком домами. Конечно, указать точно изобретателя и страну изобретения мы сейчас не сможем, в том числе и потому, что это изобретение было почти одновременно сделано в разных странах на основе более или менее одинаковой идеи.

Одна из первых датированных дверных петель (деревянная) была найдена в Швейцарии. Её возраст — 4 тыс. лет. 3—4 тыс. лет назад в Египте и Греции появились металлические дверные петли. В Древнем Риме «дверные технологии» получили новое развитие: двери, найденные при раскопках Помпеи и Геркуланума (I в. до н. э.) имели почти современные петли и замки.

Как правило, древние дверные петли имели длинную кованую крепёжную часть, которая крепилась к двери и заодно укрепляла соединение досок, из которых было сделано дверное полотно. Мощным болтом петли крепились к косяку. Некоторые из древних дверных петель могли бы украсить и наши современные жилища.

В настоящее время цилиндрические шарниры работают не только в дверных петлях. Примером цилиндрического шарнира является шариковый подшипник, который широко используется в машиностроении для фиксации вращающейся оси машины относительно её корпуса (рис. 4.4); металлические шарики используются в подшипнике для уменьшения трения между втулками, поскольку позволяют заменить трение скольжения трением качения между втулками и шариками.

Рис. 4.4

Цилиндрические шарниры используются даже при строительстве мостов. Например, опоры моста нельзя закреплять жёстко, поскольку механические напряжения, вызванные перепадами температур, могут привести к его разрушению. Поэтому соединение в одной из опор моста делают в виде неподвижного цилиндрического шарнира (рис. 4.5, *а*), в другой — в виде подвижного шарнира, допускающего небольшие смещения мостового пролёта относительно опор (рис. 4.5, *б*). В результате пролёт моста имеет небольшую свободу в движении относительно опор (именно поэтому дорожное полотно мостового пролёта имеет зазоры 2—3 см относительно полотна остальной дороги, которые чувствуются при проезде по мосту на автомобиле).

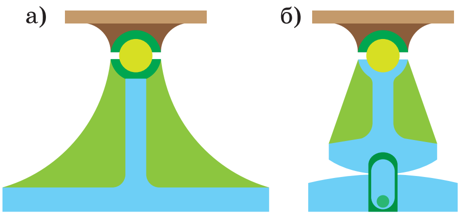


Рис. 4.5

Обозначение шарнирно-неподвижного (*а*) и шарнирно-подвижного (*б*) крепления тел показано на рисунке 4.6. Технически шарнирно-подвижная опора обеспечивается следующим образом: опору цилиндрического шарнира шарнирно прикрепляют к неподвижной опоре (см. рис. 4.6) или устанавливают на мощные цилиндрические катки, допускающие её горизонтальное перемещение в небольших пределах. Мостовые шарниры изготавливаются из очень прочной стали и могут выдержать огромную нагрузку.

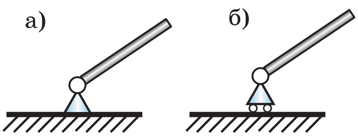


Рис. 4.6

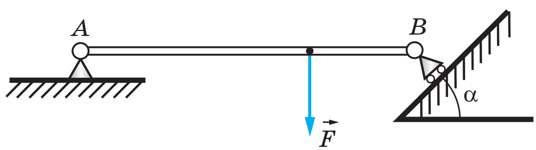
4.3. Теория цилиндрического шарнира

Фактически теория шарнира должна обеспечивать возможность расчётов усилий, возникающих в шарнирах при тех или иных их расположениях и/или приложении к ним внешних воздействий.

Для этого можно использовать основы статики — условия равновесия тел: уравнение сил и уравнение моментов. Итак, пусть имеется тело, прикреплённое шарнирно к некоторой поверхности. Так как шарнир ограничивает возможные движения тела, то в ответ на попытку заставить тело совершить запрещённое шарниром движение в шарнире возникают силы, компенсирующие внешнее воздействие.

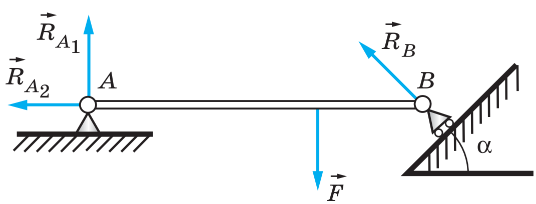
Поскольку эти силы возникают в ответ на внешние воздействия, их называют **силами реакции.**

Очевидно, цилиндрический шарнир запрещает движение тела перпендикулярно оси шарнира, но не запрещает его вращение и движение вдоль оси шарнира. Поэтому действующая на тело сила реакции цилиндрического шарнира направлена перпендикулярно оси шарнира, а момента сил шарнир не создаёт. Сила реакции шарнирно-подвижного закрепления не может иметь составляющих, направленных вдоль поверхности, на которой расположен подвижный шарнир. Для нахождения сил реакции используют условия равновесия тел — уравнение сил и уравнение моментов. Рассмотрим пример.



Задача 4.1. Стержень AB расположен горизонтально. Его левый конец A закреплён шарнирно-неподвижно, правый конец B закреплён шарнирно-подвижно на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Стержень нагружен вертикальной силой $\vec{F}$, приложенной на расстоянии двух третьих его длины от неподвижного шарнира. Определите силы реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ шарниров. Силой тяжести стержня можно пренебречь.

Решение. Силы реакции шарниров показаны на рисунке. При этом направление силы реакции шарнира B точно известно — перпендикулярно наклонной плоскости, поскольку опора B шарнирно-подвижная. А вот про силу реакции шарнира A известно только то, что она направлена перпендикулярно оси шарнира, т. е. в данном случае в плоскости чертежа. Поэтому, чтобы не гадать о направлении этой силы, обычно поступают так. Вводят две составляющих силы реакции на взаимно перпендикулярные оси. Находят их из уравнений статики, а если какая-то из составляющих оказывается отрицательной, то её направление считается обратным выбранному направлению оси. А затем по теореме Пифагора находят и саму силу реакции.



Силы, действующие на стержень со стороны шарниров, показаны на рисунке. Сила $\vec{R}_B$ перпендикулярна наклонной плоскости, сила $\vec{R}_A$ разложена на вертикальную и горизонтальную составляющие $\vec{R}_{A_1}$ и $\vec{R}_{A_2}$. Условие равенства нулю суммы моментов всех действующих на тело сил по отношению к шарниру A даёт

$$\frac{2}{3}lF = l\cos\alpha R_B,$$

где l — длина стержня. Отсюда находим

$$R_B = \frac{2F}{3\cos\alpha}.$$

Теперь из условия равенства нулю суммы всех действующих на тело сил

$$\vec{R}_{A_1} + \vec{R}_{A_2} + \vec{R}_B + \vec{F} = 0 \qquad (*)$$

получаем проекции уравнения (*) на горизонтальную и вертикальную оси:

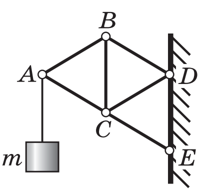
$$R_{A_1} = F - R_B\cos\alpha = \frac{1}{3}F, \qquad R_{A_2} = -R_B\sin\alpha = -\frac{2}{3}F\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

То обстоятельство, что сила $\vec{R}_{A_2}$ оказалась отрицательной, означает, что направление для неё было выбрано неверно, и сила $\vec{R}_{A_2}$ направлена вправо (см. рисунок). А теперь по теореме Пифагора находим силу R_A:

$$R_A = \sqrt{R_{A_1}^2 + R_{A_2}^2} = \frac{1}{3}F\sqrt{1 + 4\mathrm{tg}^2\alpha}.$$

Что же касается моментов сил, то в шарнирах они в принципе возникнуть не могут из-за возможности свободного вращения вокруг шарнира, т. е. $M_A = 0$, $M_B = 0$.

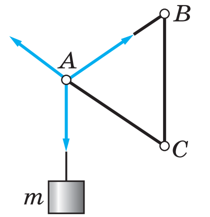
Как указывалось выше, шарниры используют в прочностных элементах (мостовых фермах или кронштейнах) для снятия внутренних напряжений.



Задача 4.2. Тело массой m подвешено на нити в точке A прикреплённого к стене кронштейна $ABCDE$, состоящего из шести невесомых стержней одинаковой длины, соединённых шарнирно (см. рисунок); длина отрезка DE на стене также равна длине стержня. Растяжение или сжатие испытывает стержень BC? Определите силу натяжения стержня BC.

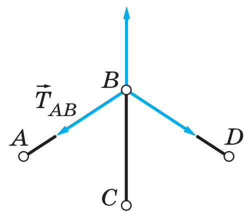
Решение. Если удалить стержень BC, то точки B и C начнут сближаться, поскольку треугольник CDE останется на месте, а ромб $CABD$ будет «складываться». Следовательно, стержень BC сжат. Аналогично заключаем, что стержень AB растянут, а стержень AC также сжат.

Найдём силу натяжения стержня BC. Во-первых, заметим, что воздействие шарнира на стержень или стержня на шарнир может осуществляться только вдоль стержня (в противном случае не будет выполнено условие равновесия самого стержня).



Рассмотрим шарнир A. Поскольку стержень AC сжат, а стержень AB растянут, на шарнир A действуют сила натяжения нити, равная силе тяжести груза, и силы натяжения стержней AB и AC, направленные так, как показано на рисунке. Чтобы шарнир был в равновесии, сумма этих сил должна быть равна нулю. А поскольку углы между этими силами равны 120°, то сумма сил равна нулю только в том случае, когда равны их модули. Поэтому

$$T_{AB} = mg, \ T_{AC} = mg.$$



На шарнир B действуют три силы, сумма которых равна нулю, которые направлены под углами 120° друг к другу и одна из которых нам известна: $T_{AB} = mg$. Следовательно, и две остальные силы T_{BC} и T_{BD} равны друг другу и силе T_{AB}. Поэтому

$$T_{BC} = mg.$$

4.4. Сферический шарнир

В некоторых ситуациях сочленённым элементам конструкций необходимо разрешить перемещаться друг относительно друга в любых направлениях, сохраняя только одну общую точку. В этом случае используют **сферический шарнир**. Вообще сферическим шарниром называют устройство, которое позволяет сочленённым телам, имеющим общую точку, совершать любые пространственные движения относительно друг друга. Очевидно, таким движением является вращение каждого из тел относительно общей точки. Конструктивно сферический шарнир выглядит так: одно тело заканчивается шаром, который вставляется в сферическую обойму или сферический подшипник того же диаметра, жёстко закреплённый на втором теле (см. рис. 4.2).

В любом современном автомобиле есть несколько узлов, в которых используются сферические шарниры. Первый — это крепление передних (управляемых) колёс автомобиля к рычагу подвески. Сферические шарниры выполняют здесь следующие функции: передние колёса автомобиля должны иметь возможность поворачиваться по отношению к самому автомобилю, притом что угол между рычагом подвески и плоскостью колеса меняется из-за поворотов руля, работы амортизаторов, а само колесо

Рис. 4.7

должно в любой момент времени оставаться в вертикальной плоскости. Поэтому переднее колесо крепится к рычагам подвески с помощью двух сферических шарниров, которые принято называть шаровыми опорами (рис. 4.7). Задача шаровой опоры — обеспечить возможность поворота колеса и амортизации при сохранении его положения в вертикальной плоскости.

Второй — это конец рычага, передающего усилия руля к передним колёсам (наконечник рулевой тяги). Только использование шарового шарнира позволяет управлять поворотными колёсами при различных углах их поворота и разных деформациях подвески.

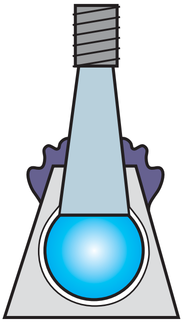


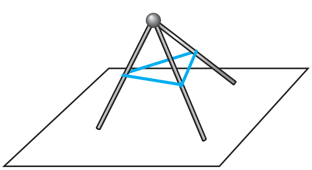
Рис. 4.8

Конструкция **шаровой опоры** или рулевого наконечника достаточно проста. Это конусообразный шток, который называется пальцем шарнира, со сферическим или грибообразным наконечником, который вставляется в прочный корпус (рис. 4.8). Корпус крепится к рычагу подвески или рулевой тяге болтами или запрессовывается в него. Для устранения попадания в шарнир грязи сверху он закрывается резиновым пыльником. В современных автомобилях чаще всего используют неразборные конструкции, в которых после установки пальца корпус завальцовывается. Между наконечником и корпусом помещают пластиковые вкладыши, снижающие трение и обеспечивающие таким образом небольшие поворотные усилия.

В старых автомобилях шаровые опоры были разборными и подлежали ремонту в среднем через каждые 30—50 тыс. км пробега. В корпусе шаровой опоры делалось контрольное отверстие, позволявшее с помощью штангенциркуля оценить степень стираемости пластикового вкладыша и необходимость ремонта опоры. В современных автомобилях шаровая опора неразборная и меняется целиком.

4.5. Теория сферического шарнира

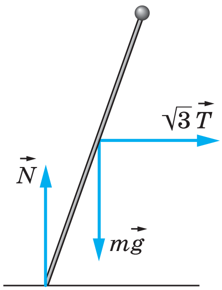
Так же как и теория цилиндрического шарнира, теория сферического шарнира должна позволять находить силу реакции, возникающую в шарнире в ответ на внешнее воздействие на шарнирно закреплённое тело. Используются те же идеи статики. Различие состоит только в том, что сила реакции сферического шарнира может иметь три ненулевые составляющие — одну в направлении, перпендикулярном поверхности, на которой закреплён шарнир, и две параллельные этой поверхности. Поэтому при исследовании сферического шарнира во многих случаях приходится рассматривать не плоскую, а объёмную статическую задачу. Рассмотрим пример.



Задача 4.3. Три одинаковых стержня массой m каждый соединены с помощью сферического шарнира (см. рисунок). Противо-

положными концами стержни опираются на гладкую плоскость. Середины стержней связаны одинаковыми нитями, длины которых в два раза меньше длин стержней. Определите силу реакции шарнира, действующую на каждый стержень.

Решение. Очевидно, угол между стержнями будет равен 60° (так как нити прикреплены к серединам стержней и их длина равна половине длины стержня, то треугольник, составленный из нити и двух половин стержней, равносторонний). Кроме того, равносторонним является треугольник из трёх нитей.



Рассмотрим условие равновесия каждого стержня. На него действуют (см. рисунок): сила тяжести, две силы натяжения нитей (их сумма равна $\sqrt{3}T$, где T — сила натяжения каждой нити, она направлена к центру треугольника, составленного из нитей), сила реакции поверхности $\vec{N}$, сила реакции шарнира (на рисунке последняя сила не показана).

Используем условие равенства нулю суммы моментов этих сил относительно шарнира. Но сначала найдём плечи всех сил. Так как треугольник, вершинами которого являются точки опоры стержней о поверхность, равносторонний со стороной l (длина каждого стержня), то плечо силы реакции относительно шарнира равно $\sqrt{3}l/3$, плечо силы тяжести — $\sqrt{3}l/6$, плечо равнодействующей сил натяжения — $l/\sqrt{6}$. Поэтому правило моментов даёт равенство

$$N\frac{\sqrt{3}l}{3} = mg\frac{\sqrt{3}l}{6} + \sqrt{3}T\frac{l}{\sqrt{6}}.$$

А поскольку $N = mg$ (в вертикальном направлении на систему действуют три силы реакции и сила тяжести $3mg$), из условия равновесия находим:

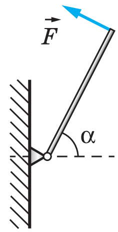
$$T = \frac{mg}{\sqrt{6}}. \qquad (*)$$

Найдём теперь силу реакции шарнира. Очевидно, что она направлена горизонтально. Действительно, поскольку сумма сил, действующих со стороны всех стержней на шарнир, должна равняться нулю, а силы эти одинаковы, то их вертикальные составляющие нечем было бы компенсировать. Отсюда и следует, что сила реакции шарнира, действующая на каждый стержень, горизонтальна. Поэтому из условия равновесия стержня и формулы (*) выражаем силу реакции:

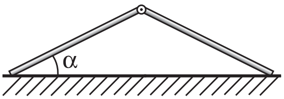
$$N_ш = \frac{mg}{\sqrt{6}}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Один конец стержня, имеющего массу m, прикреплён к вертикальной стенке с помощью шарнира. Ко второму концу стержня приложена некоторая сила $\vec{F}$, направленная перпендикулярно стержню. В равновесии угол между стержнем и горизонтом равен α (см. рисунок). Определите силу реакции шарнира.

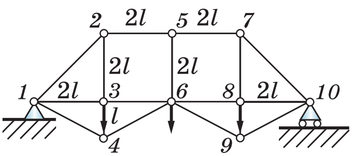


4.2. Однородная балка массой m имеет длину l и толщину h. Левый нижний угол балки соединён с вертикальной стеной шарниром, верхний левый угол прикреплён к стене горизонтальным тросом. Определите силу давления балки на ось шарнира.

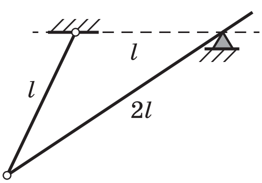


4.3. Два одинаковых стержня соединены шарниром и поставлены вертикально на шероховатый пол так, что угол между стержнями и поверхностью равен α (см. рисунок). При каком минимальном угле α возможно такое равновесие? Коэффициент трения между стержнями и поверхностью равен k. Стержни находятся в вертикальной плоскости.

4.4. Для замены опасных деформаций изгиба деформациями растяжения—сжатия и облегчения веса большепролётных конструкций пролёты мостов часто делают из относительно лёгких металлических стержней, соединённых системой шарниров. Такая конструкция называется мостовой фермой (от лат. *firmus* — прочный).



Имеется мостовая ферма пешеходного моста, слева опирающаяся на неподвижный шарнир, справа — на шарнирно-подвижную опору (см. рисунок). В шарнирах *3*, *6*, *8* к ферме приложены сосредоточенные силы $F_1 = F_2 = F_3 = 20$ кН. Чему равны силы натяжения стержней *1—2* и *6—9*? Весом самой фермы можно пренебречь. Геометрические параметры фермы показаны на рисунке.



4.5. Стержни, имеющие длины l и $2l$ и массы m и $2m$ соответственно, соединены шарниром (см. рисунок). Короткий стержень прикреплён шарнирно к потолку, а длинный опирается на точечную опору, расположенную на расстоянии l от точки крепления короткого стержня к потолку на одной с ней горизонтали. Определите угол, который составляет длинный стержень с горизонталью в равновесии. Трение не учитывайте.

ГЛАВА 5

МЕХАНИЗМЫ, ПЕРЕДАЮЩИЕ ДВИЖЕНИЕ

Передача движения — главное достижение машиностроения

5.1. Передача движения — основная задача машиностроения

Одной из важнейших задач машиностроения является передача движения. Действительно, в любой движущейся машине необходимо передавать вращение от одной части к другой, например от двигателя к колёсам, или преобразовывать поступательно-возвратное движение поршня двигателя во вращение его вала. Рассмотренные шарниры не могут этого сделать, поскольку разрешают свободное вращение одних частей машины относительно других. Поэтому задачи по передаче вращения решают другие устройства, которые, однако, также называют шарнирами. Такими передающими движение механизмами являются: зубчатая передача, карданный шарнир, шарнир равных угловых скоростей, кривошипно-шатунный механизм, дифференциал и многие другие. Именно об этих устройствах мы и поговорим в настоящей главе. Обсудим также «шарнирные» работы выдающегося российского математика Пафнутия Львовича Чебышёва, который научился преобразовывать вращательное движение вала двигателя практически в любое движение, в том числе в человеческий шаг. Давайте рассмотрим эти устройства более подробно.

5.2. Зубчатая передача

Одним из важнейших устройств, которое может передавать вращение между осями, является **зубчатая передача**. Она состоит из двух или большего количества зубчатых колёс, зубцы которых зацеплены друг за друга (рис. 5.1). Благодаря этому зацеплению вращение одного колеса передаётся другому. С помощью зубчатой передачи можно передать движение с одной оси на другую, занимающую к тому же другое положение в пространстве, а также изменить параметры движения — скорость и передаваемое усилие. Разновидностью зубчатой передачи является ременная (цепная) передача, в которой колёса связываются ремнём (цепью). Благодаря трению (или зубчатому зацеплению, как у велосипедной цепи) вращение одного колеса передаётся ремню, который, в свою очередь, вращает другое колесо.

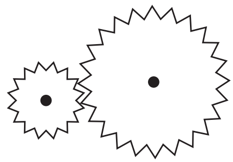


Рис. 5.1

История зубчатой передачи насчитывает более трёх тысяч лет. В Древнем Египте использовались оросительные устройства, состоявшие из деревянной зубчатой передачи и колеса с большим числом ковшей, которые поднимали воду. Во вращение колесо приводилось домашними животными — быками и лошадьми. Сами зубчатые колёса древних египтян представляли собой деревянные цилиндрические барабаны, в которые вставлялись деревянные штыри, выполнявшие функции зубьев.

В Древнем Риме в I—II вв. до н. э. была изобретена водяная мельница, в которой использовались зубчатые передачи. Древнеримский инженер и архитектор I в. до н. э. **Марк Витрувий** описывает большое лопастное колесо, которое приводилось в движение водой с помощью двух поставленных под углом зубчатых колёс. Лопастное колесо вращало жернова, размалывающие зерно.

Множество рисунков, записей и несколько моделей устройств, использующих зубчатую передачу, оставил нам **Леонардо да Винчи**. Он спроектировал шагомер, механическую пилу с вертикальным полотном, токарный станок с ножным приводом, печатный станок с устройством для автоматической подачи листов бумаги. Он придумал роликовую цепь, которая и сегодня применяется в велосипедах, мотоциклах и т. п. Но всё это было только нарисовано, но не реализовано.

А уже в XVII в. зубчатой передачей занялся великий физик и инженер **Роберт Гук**. Кроме вопросов использования зубчатых передач в шарнирных цепях и часах, Гук занимался общими принципами зубчатого зацепления. До Гука о форме зубцов вообще не задумывались, и она получалась такой, какую им мог придать более или менее квалифицированный плотник или слесарь. Идея Гука заключалась в том, что между зубьями не должно происходить удара, поэтому зубья должны находиться в постоянном контакте друг с другом, а точка их контакта — лежать на прямой, соединяющей центры колёс. Используя эти принципы, французский математик **Филипп де Ла Гир** в конце XVII в. установил, что зубья должны иметь форму эпициклоиды (кривой, которую описывает точка на ободе колеса, вращающегося без проскальзывания по поверхности другого колеса). Идея Гука относительно принципов зацепления зубьев колёс до сих пор используется при конструировании зубчатых передач.

Практически одновременно с Гуком голландец **Христиан Гюйгенс** — «гениальнейший часовой мастер всех времён», по словам А. Зоммерфельда [17], — создал первые недорогие часы, которые были широко распространены в Европе. После этого производство зубчатых передач стало уже не штучным, а массовым. А затем были «прялка Дженни», положившая начало промышленной революции XVIII в., двигатели Уатта, автомобиль Отто и Бенца, работа которых абсолютно немыслима без множества зубчатых передач.

Зубчатая передача — наиболее распространённый вид передаточного механизма в машиностроении. Её применяют для передачи мощностей от долей ватта (как в механизмах кварцевых часов) до десятков тысяч киловатт (крупные энергетические установки, дробилки, обжиговые печи) при скоростях на поверхности колёс до 150 м/с и передаточных числах до нескольких тысяч. Диаметр зубчатых колёс может составлять от долей миллиметра до 10 м. Например, диаметр зубчатых колёс судовых установок, передающих мощность на гребной винт, достигает 6 м.

Основной деталью системы передачи движения является зубчатое колесо. Оно изготавливается в виде диска с зубьями, входящими в зацепление с зубьями другого колеса. Изначально в «русскоязычной» прикладной механике было принято самое малое зубчатое колесо называть шестернёй, а все большие — просто зубчатыми колёсами. Однако сейчас все зубчатые колёса называют шестернями. Откуда пошло название «шестерня», точно неизвестно. По одной из версий, слово произошло от искажения слова «шестёрка» (самая маленькая карта среди игральных карт). По другой версии, название возникло, потому что при изготовлении шестерни диск условно делился на шесть секторов, на которых вырезались зубья.

Колесо, к которому подводится вращающий момент, называется **ведущим,** а колесо, с которого вращающий момент «снимается», **— ведомым.** Меняя диаметры колёс, можно добиться увеличения или уменьшения вращающего момента и соответственно уменьшения или увеличения угловой скорости.

Трудно отыскать направление современного машиностроения, где не использовалась бы зубчатая передача. Везде, где есть вращение вала двигателя и передача вращения колёсам, маховику, резцу, сверлу и т. д., работает зубчатая передача. Например, в автомобиле от двигателя к колёсам вращение передаётся с помощью нескольких зубчатых передач.

Коробка передач любого автомобиля представляет собой систему зубчатых колёс, которые меняются при переключении скоростей.

Так что без зубчатых передач наша цивилизация никак не может обойтись.

В настоящее время используется множество разнообразных зубчатых передач, отличающихся друг от друга формой зубьев (эвольвентная, циклоидальная, цевочная), расположением зубьев на колесе (прямозубые, косозубые и шевронные, рис. 5.2—5.4), расположением осей валов (с параллельными, пересекающимися или перекрещивающимися осями). Все они имеют разные возможности по передаче мощности, разный уровень шума, по-разному чувствительны к перекосам колёс и изменениям межосевого расстояния, имеют разную сложность изготовления и эксплуатации.

По форме начальных поверхностей колёс, на которых изготавливаются зубья, передачи делятся на цилиндрические, конические (рис. 5.5) и глобоидные (зубчатое колесо представляет собой часть сферы); по расположению зубьев

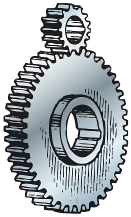


Рис. 5.2

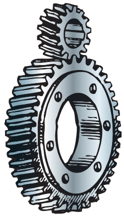


Рис. 5.3

Рис. 5.4

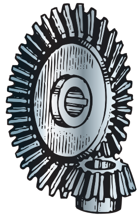


Рис. 5.5

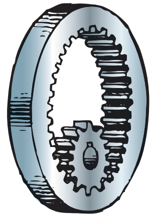


Рис. 5.6

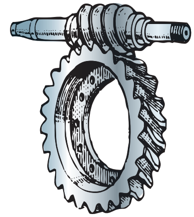


Рис. 5.7

передачи могут быть внешними (см. рис. 5.5), внутренними (рис. 5.6) и реечными (от франц. *crémaillère* — кремальера, зубчатая рейка), когда одно из колёс заменено зубчатой рейкой, перемещающейся при вращении колеса[1].

К описанным выше зубчатым передачам примыкают винтовые передачи, когда одно из колёс заменено на винт. При вращении винта зубчатое колесо движется по его резьбе и в результате вращается. Одной из самых распространённых винтовых передач является червячная передача (рис. 5.7). В отличие от зубчатой передачи, в червячной передаче происходит движение колеса по червяку, и при некоторых передаточных отношениях червячная передача обладает эффектом самоторможения и является необратимой: если приложить момент сил к зубчатому колесу, из-за силы трения возникает эффект заклинивания и мощность не передаётся на червяк. Этот эффект используется во многих механизмах, в которых обратная передача мощности от ведомого вала к ведущему является нежелательной. Достаточно часто червячные передачи используются в системах регулировки и управления. В частности, червячная передача используется в системе рулевого управления автомобилей, в подъёмно-транспортных механизмах (лебёдках) и др.

Главным недостатком червячной передачи является необходимость точной подгонки червяка и колеса — в противном случае возможно заклинивание передачи, а также большие потери на трение.

Интересно, что числа зубьев зацепляющихся колёс всегда являются взаимно простыми, т. е. числами, не имеющими общих делителей (например, 27 и 64). Это делается для меньшей стираемости зубьев. Действительно, пусть один из зубьев одного колеса имеет дефект. Тогда при его контакте с зубьями другого колеса последние будут стираться. Если у чисел зубьев колёс есть общие делители, то контакт дефектного зуба будет происходить не со всеми зубьями второго колеса, а только с определённым набором зубьев (если, например, числа зубьев различаются вдвое, а дефектный зуб находится на малом колесе, то он будет контактировать только с двумя зубьями большого колеса, которые, таким образом, и будут стираться). Если же числа зубьев на колёсах не имеют общих делителей, то дефектный зуб будет контактировать со всеми по очереди зубьями другого колеса, стирая их одинаково.

[1] В современной технике ручка прибора, соединённая с реечной передачей, также называется кремальерой.

5.3. Теория зубчатой передачи

Главный вопрос, на который должна отвечать теория зубчатого зацепления: как происходит передача скорости и момента от одного колеса другому? Иными словами, теория должна позволять по заданной скорости ведущего вала и моменту силы, который он может создавать, находить скорость ведомого вала и крутящий момент, который с него можно «снять», т. е. получить.

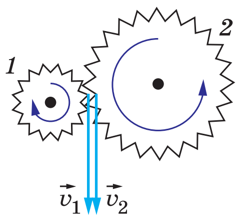


Рис. 5.8

Основная идея такой теории заключается в том, что из-за зубчатого зацепления линейная скорость точек на периферии зацепленных колёс является одинаковой (рис. 5.8). Поэтому угловые скорости колёс (а следовательно, и число оборотов, совершаемых колёсами в единицу времени) будут относиться как их радиусы:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_2 r_2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \tag{5.1}$$

Здесь v_1 и v_2 — линейные скорости на периферии колёс, ω_1 и ω_2 — их угловые скорости, r_1 и r_2 — радиусы. (Тем, кто не помнит, как описывается вращательное движение, рекомендуем обратиться к главе 9 этой книги.)

Кроме того, очевидно, что

зацепляющиеся колёса вращаются в противоположных направлениях.

Поскольку размеры зубцов зацепляющихся колёс должны быть одинаковы, а длина окружности колеса пропорциональна радиусу, количество зубьев на колесе пропорционально его радиусу. Поэтому из формулы (5.1) получаем

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_2}{n_1}, \tag{5.2}$$

где n_1 и n_2 — количество зубьев колёс. Отношение n_2 / n_1 принято называть **передаточным числом** (или **передаточным отношением**) зубчатой передачи.

Рассмотрим теперь вопрос о передаче вращающего момента. Пусть на ведущий вал мы подаём вращающий момент (момент силы) M_1. Это значит, что ведущая шестерня будет вращаться равномерно, если к её ободу мы прикладываем тормозящую силу F_1, удовлетворяющую соотношению

$$F_1 r_1 = M_1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{M_1}{r_1}. \tag{5.3}$$

По третьему закону Ньютона такая же сила действует на ведомую шестерню со стороны ведущей:

$$F_2 = F_1 = \frac{M_1}{r_1}. \tag{5.4}$$

Поэтому ведомая шестерня будет вращаться равномерно, если к ней приложить тормозящий момент, определяемый соотношением

$$M_2 = F_2 r_2 = \frac{M_1 r_2}{r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{5.5}$$

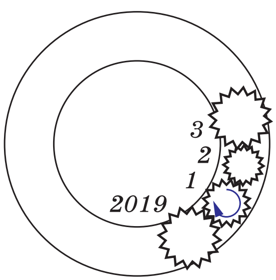
Очевидно, мощностью N, снимаемой с вала, следует назвать работу, которую вал может совершить в единицу времени:

$$N = Fv = M\omega. \tag{5.6}$$

Из формул (5.2), (5.5) и (5.6) заключаем, что если передаточное отношение больше единицы, то угловая скорость ведомого колеса (а следовательно, и частота вращения) меньше угловой скорости ведущего, снимаемый момент больше, а мощность не меняется (как и должно быть в соответствии с законом сохранения энергии). Или, другими словами, в случае передаточного отношения, большего единицы, передача повышает момент, понижает частоту вращения, но не меняет мощность. В случае когда передаточное отношение меньше единицы, положение обратное.

Механизмы, понижающие частоту вращения, принято называть **редукторами**, повышающие — **мультипликаторами**.

Конечно, вывод о неизменности передаваемой мощности относится только к такой ситуации, когда, кроме снимаемого момента, никакие дополнительные силы на ведомую шестерню не действуют (в частности, нет трения). В противном случае при передаче происходит потеря передаваемой мощности. Рассмотрим два примера.



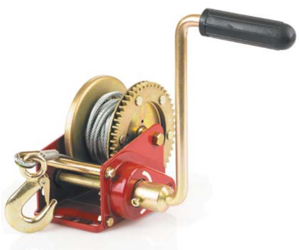
Задача 5.1. В плоскости расположено 2019 зубчатых колёс (разных радиусов) с зацепляющимися зубцами. Колёса расположены по кругу, как показано на рисунке, и 2019-е колесо зацепляется за первое. Первое колесо вращается по часовой стрелке (см. рисунок). Может ли вращаться такая система? Ответ обоснуйте.

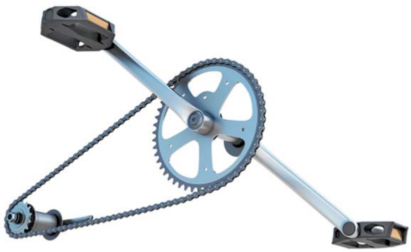
Решение. Пусть есть два зацепляющихся зубчатых колеса, вообще говоря, разных радиусов. При вращении одного из них второе будет вращаться так, что линейные скорости точек колёс в точке их соприкосновения будут совпадать. Поэтому колёса вращаются в разные стороны: одно — по часовой стрелке, а другое — против часовой стрелки. Если есть третье зубчатое колесо, связанное с одним из первых двух, то оно будет вращаться в противоположном направлении по сравнению с тем колесом, с которым оно сцеплено, и линейная скорость его поверхности будет такая же, как у первых двух. И т. д.

Чтобы система колёс, связанных друг с другом по кругу, могла вращаться, нужно, чтобы первое и последнее колёса вращались в разных направлениях и линейные скорости точек поверхности совпадали. Второе условие выполнено всегда независимо от размера колёс, первое же условие выполнено, если число колёс по кругу чётное. В задаче оно нечётное, поэтому система вращаться не может.

Решим теперь задачу, в которой рассматриваются передачи с разным передаточным отношением — для передачи момента или скорости.

Задача 5.2. Лебёдка и велосипед используют зубчатую передачу, но у лебёдки усилие прикладывается к малому зубчатому колесу и затем передаётся на большое, а у велосипеда наоборот — усилие прикладывается к большому, а затем передаётся на малое (см. фотографии). Объясните, чем вызвано такое различие.





Решение. Главное в лебёдке — сила, которую она может обеспечить, в велосипеде — скорость. Именно с этим и связано различие зубчатых передач лебёдки и велосипеда.

Рассмотрим сначала лебёдку. При повороте ведущего колеса на один оборот лебёдка вытягивает длину троса, равную длине окружности ведущего колеса. Поэтому чем меньше ведущее колесо, тем меньше скорость вытягивания троса. При большом диаметре зубчатого колеса (как у велосипеда) цепь прокручивается на бо́льшую длину, обеспечивая бо́льшую скорость вращения ведомого колеса (особенно при условии малого размера шестерни ведомого колеса). Поэтому скорости вытягивания троса или цепи пропорциональны радиусам зубчатых колёс.

Однако усилия, которые необходимо затратить на вращение зубчатых колёс, обратно пропорциональны радиусам. Действительно, момент внешней силы, который необходимо приложить к колесу для его вращения, равен моменту сил сопротивления, а последний пропорционален плечу, т. е. радиусу колеса.

Поэтому, используя малое ведущее колесо, мы выигрываем в силе, но проигрываем в скорости. И наоборот, используя большое ведущее колесо, мы выигрываем в скорости, но проигрываем в силе.

5.4. Карданная передача (шарнир Гука)

Для передачи вращения от одной оси к другой, расположенной под небольшим углом к первой, используют **карданную передачу**, или **шарнир Гука** (рис. 5.9). В карданной передаче два вала соединяются крестовиной, которая вращается благодаря вращению одного вала и вращает другой вал.

Рис. 5.9

Карданная передача используется во всех заднеприводных автомобилях с передним расположением двигателя для передачи мощности задним колёсам. Необходимость использования карданной передачи обусловлена тем, что расстояние от двигателя до заднего моста автомобиля может составлять несколько метров, а ведущий мост, связанный с автомобилем через подвеску, может перемещаться под действием дефектов дороги. Кузов и рама также имеют некоторую степень свободы, в них возникают упругие деформации под влиянием внешних воздействий. Таким образом, оси валов, передающие

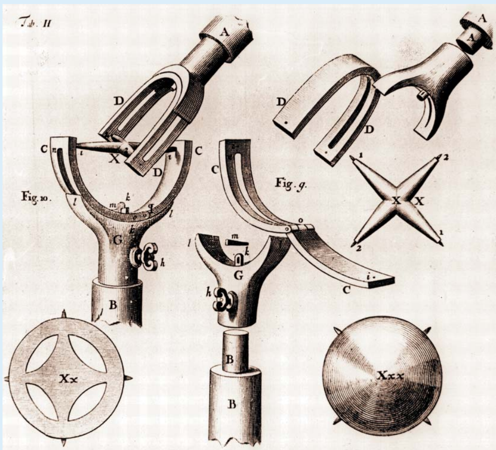


Рисунок Р. Гука

В III в. до н. э. **Филон Византийский** изобрёл систему крепления тела, допускающую сохранение оси вращения тела независимо от ориентации крепления. Затем это крепление было забыто, переоткрыто китайцами в I в. н. э. и из Китая пришло в Европу. В середине XVI в. итальянский математик **Кардано** описал это крепление в книге «Хитроумное устройство вещей», и крепление стало называться «карданов подвес». А в середине XVII в. английский физик и инженер **Роберт Гук** на основе идеи карданного подвеса придумал шарнир для передачи движения между двумя осями, расположенными под углом друг к другу. Гук создал почти современную версию шарнира (см. рисунок). В 1898 г. **Луи Рено** использовал карданный шарнир для передачи вращения от коробки передач к заднему мосту автомобиля. Сейчас такую передачу чаще всего называют карданным валом. В дальнейшем карданный вал менялся незначительно, поскольку более совершенной системы передачи крутящего момента никто предложить не смог.

крутящий момент от двигателя к ведущим колёсам, могут смещаться относительно друг друга, может изменяться и линейное расстояние между ними. Кроме того, в грузовых автомобилях двигатель всегда расположен выше оси заднего моста, поэтому передать вращение от двигателя задним колёсам с помощью прямого вала двигателя невозможно. Передачу крутящего момента с учётом несовпадения осей валов и их изменяющегося взаимоположения обеспечивает карданный шарнир.

У карданного шарнира есть один очень существенный недостаток. При равномерном вращении ведущего вала ведомый вал вращается неравномерно (при одинаковой средней угловой скорости). Это приводит к рывкам в передаче мощности колёсам и возникновению в кардане напряжений, которые с течением времени разрушают крестовину кардана. Отчасти эту проблему удалось решить путём использования двух карданных шарниров, повёрнутых на угол 90° друг относительно друга. В этом случае при правильной эксплуатации и езде по хорошим дорогам ресурс крестовины карданного вала составляет около 200 тыс. км. Но у грузовиков, работающих в карьерах, ресурс карданного вала значительно снижается.

5.5. Шарнир равных угловых скоростей

Из-за неравномерности вращения карданный шарнир работает при углах между валами не более 20° (в современных заднеприводных автомобилях этот угол составляет не более 10°). А как передать движение от двигателя ведущим колёсам в переднеприводном автомобиле? Ведь передние колёса автомобиля являются поворотными, и их оси могут поворачиваться по отношению к самому автомобилю на углы до 30°. В то же время у переднеприводных автомобилей есть очевидные преимущества перед заднеприводными: они более устойчивы на дороге, гораздо проще в управлении и не требуют от водителя специальной квалификации, особенно в условиях плохой дороги.

Нужно было придумать устройство, передающее мощность от двигателя на переднюю ось. Такое устройство придумано и называется **шарниром равных угловых скоростей** (сокращённо ШРУС). Современные ШРУСы позволяют передавать вращение между валами, расположенными под углами до 45°, причём независимо от угла между валами угловая скорость ведомого вала совпадает с угловой скоростью ведущего вала (рис. 5.10).

Рис. 5.10

В шарнире равных угловых скоростей используются идеи шарикового подшипника, но втулки имеют сферическую форму, а шарики, осуществляющие передачу вращения между втулками, движутся в продольных канавках. Для защиты от пыли шарнир закрывают прочным резиновым пыльником. Конечно, технологически ШРУС является достаточно сложным устройством и требует высокой точности при изготовлении деталей. Но эти технологии хорошо отработаны, и при непопадании в ШРУСы пыли и грязи они очень долговечны: считается, что ресурс ШРУСа составляет 300—400 тыс. км, что может превосходить ресурс самого автомобиля. Загрязнения же существенно снижают ресурс шарнира, поэтому необходимо следить за сохранностью пыльников.

В 1920 г. немецкий инженер **Карл Вайсс** вставил в карданный шарнир вращающиеся шарики (как в подшипнике). Для этого были сделаны специальные канавки. В результате вращение одной втулки шарнира заставляло вращаться другую. Потом Вайсс сделал втулки подшипника сферическими, а канавки — продольными. Затем шарнир усовершенствовал американский инженер **Винсент Бендикс**. А когда в 1936 г. американец **Альфред Рцеппа**[1] создал ШРУС на шести шариках, началось массовое производство переднеприводных автомобилей. Кстати, одна из разновидностей ШРУСа называется «рцеппа».

В заключение отметим следующее (перефразируя высказывание знаменитого физика-теоретика Л. Д. Ландау об общей теории относительности): мы хорошо понимаем, как работает ШРУС, мы только не понимаем, как до него можно было додуматься! Восхищайтесь придумавшими его инженерами. Они этого заслуживают!

5.6. Шарнир Липкина—Посселье

В связи с бурным развитием машиностроения в середине—конце XIX в. потребовалась теория передачи движения.

Этой теорией занялся выдающийся русский математик и механик **Пафнутий Львович Чебышёв**. Чебышёв поставил задачу создания механизма, преобразующего вращательное движение вала двигателя в движение какого-либо тела, связанного с валом, по прямой (или, как говорили тогда, механизма, умеющего рисовать прямую). В то время существовали механизмы, которые умели рисовать прямую приближённо, например механизм Уатта, который работал в паровой машине, лямбда-шарнир Чебышёва. Они рисовали прямую приближённо, т. е. рисовали кривую, более или менее близкую к прямой. И многие математики считали, что создать плоский шарнирный механизм — систему отрезков, которые скреплены в нескольких точках и могут свободно вращаться друг относительно друга в этих точках и рисуют прямую, — невозможно.

[1] По-видимому, он был чешского происхождения и фамилия его должна читаться как *Ржеппа* (вспомним фельдфебеля Ржепу из книги «Похождения бравого солдата Швейка» Я. Гашека).

Тем не менее эта задача была решена. Её решили независимо друг от друга ученик Чебышёва **Липман Липкин** и француз **Шарль Посселье**, создав механизм, который сейчас называют **прямилом Липкина**. В машиностроении шарнир Липкина—Посселье не сыграл никакой практической роли и нигде не использовался, поскольку примерно в то же время был разработан кривошипно-шатунный механизм, а на основе нефтехимии были созданы синтетические масла, обеспечивающие его работу. Но для теории передачи движения и для математики шарнир Липкина—Посселье оказался очень важным. Давайте его рассмотрим.

Шарнир Липкина—Посселье состоит из шести основных стержней (рис. 5.11): AB, AC, BM, BN, MC и NC ($AB = AC$, $BM = BN = MC = NC$) и одного вспомогательного стержня OM. Все соединения стержней шарнирные и позволяют им свободно вращаться друг относительно друга.

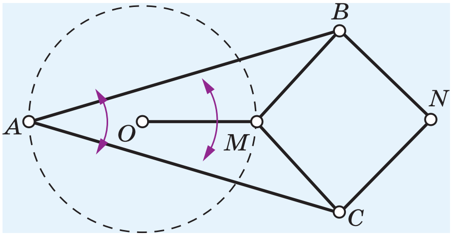
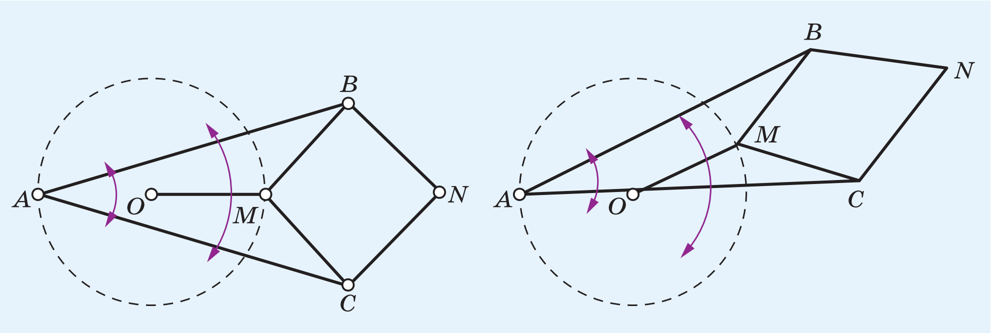


Рис. 5.11

Пусть механизм вращается вокруг точки A так, что точка M механизма движется по окружности, проходящей через точку A (показана на рисунке пунктиром; для обеспечения такого движения точка M соединяется с центром окружности стержнем OM, который также поворачивается при поворотах механизма). Очевидно, при таких поворотах механизма расстояние между точками A и M будет уменьшаться, а сам механизм, следовательно, будет сжиматься. Итак, механизм вращается...

Задача 5.3. По какой траектории будет двигаться точка N (см. рисунок)? Определите скорость точки N, если механизм $ABMNC$ вращается между своими крайними точками с постоянной угловой скоростью ω, $AB = AC = L$, $BM = BN = CM = CN = l$, длина отрезка AM в среднем положении механизма равна d.



Решение. Пусть радиус окружности, по которой движется точка M, равен R, $AB = AC = L$, $MB = MC = l$. Найдём расстояние AN. Если $MO = x$, то

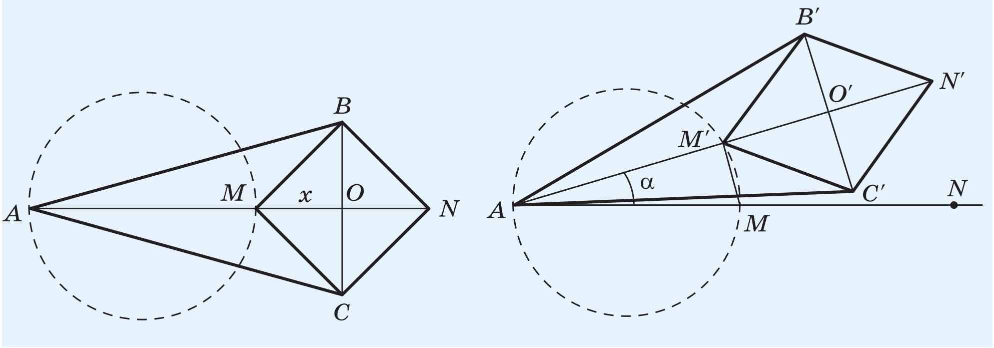
$$AB^2 - AO^2 = MB^2 - MO^2 \quad \Rightarrow \quad L^2 - (2R + x)^2 = l^2 - x^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{L^2 - l^2}{4R} - R.$$

Поэтому

$$AN = 2R + 2x = \frac{L^2 - l^2}{4R}. \qquad (*)$$



Когда конструкция из шарнирно соединённых стержней повернётся относительно точки A на угол α (см. рисунок), но так, что точка M переместится по пунктирной окружности и займёт положение M', то длину отрезка AN' можно будет вычислить с помощью аналогичных формул:

$$AN' = \frac{L^2 - l^2}{2AM'}.$$

Но угол $AM'M$ прямой (опирается на диаметр), поэтому $AM' = 2R\cos\alpha$, и, следовательно,

$$AN' = \frac{L^2 - l^2}{4R\cos\alpha}.$$

Поэтому точка N' шарнирного механизма будет проецироваться в такую точку на прямой AN, которая лежит на расстоянии

$$AN'\cos\alpha = \frac{L^2 - l^2}{4R} \qquad (**)$$

от точки A, т. е. в точку N, как это следует из сравнения уравнений (*) и (**). Таким образом, точка N шарнирного механизма будет двигаться по прямой, перпендикулярной отрезку AN и проходящей через точку N. Другими словами, при вращении всей конструкции её точка N движется по прямой.

Механизм Липкина—Посселье сыграл важную роль в исследовании свойств шарнирных передач, однако в технике особых применений не нашёл, поскольку ко времени его открытия были созданы хорошие смазочные материалы, позволяющие делать такое преобразование движения с использованием направляющих (как в кривошипно-шатунном механизме).

5.7. Шарнирные механизмы Чебышёва

В 50-е гг. XIX в. П. Л. Чебышёв сконструировал так называемый **лямбда-механизм**, который преобразовывал вращательное движение в приближённо прямолинейное (рис. 5.12). Чебышёв заметил, что траектория его движения похожа на человеческий шаг, если на прямолинейном участке траектории остановить верхнюю точку механизма относительно земли и заставить двигаться сам механизм. И что если соединить два ведущих звена двух механизмов в противофазе, то они будут работать как человеческие ноги. Для устойчивости Чебышёв соединил вместе «две пары ног» и получил **стопоходящую машину Чебышёва**, «на входе» которой вращение вала двигателя, «на выходе» — движение, имитирующее человеческий шаг.

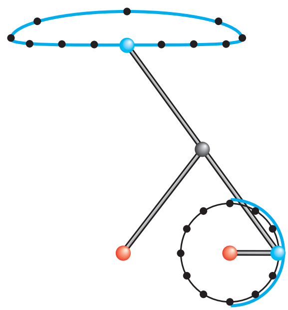


Рис. 5.12

5.8. Кривошипно-шатунный механизм

А вот связь вращательного и поступательно-возвратного движения в современном машиностроении обеспечивается с помощью **кривошипно-шатунного механизма** (КШМ). В КШМ кривошип (показан на рисунке 5.13 синим) — рычаг, совершающий вращение относительно одного из своих концов, — шарнирно связан с помощью ещё одного рычага — шатуна (показан зелёным) — с поршнем двигателя (фиолетовый) или телом, которое совершает поступательно-возвратное движение по направляющим. Кривошипно-шатунный механизм можно использовать для преобразования поступательно-возвратного движения поршня в движение вала двигателя (который связывается со вторым концом кривошипа). А можно наоборот — вращательное движение вала превращать в движение по прямой.

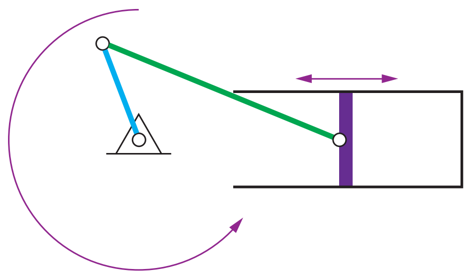


Рис. 5.13

Кривошипом называется рычаг, соединённый с осью вращения какого-либо механизма и имеющий перпендикулярную ему ручку для передачи вращения механизму.

Как и многие изобретения, принцип кривошипного вращения придумывался много раз.

По-видимому, впервые кривошип появился в Китае в I в. н. э. в колодцах и ручных мельницах. В книге «Утрехтская Псалтырь» (середина IX в., Франция), содержащей рисунки, иллюстрирующие быт людей того времени, изображён точильный камень с кривошипным приводом. Потом кривошипный принцип использовался в колодцах. У арабов кривошип упомянут впервые лишь в 1206 г. В XIV в. в Европе начали снабжать кривошипной лебёдкой арбалеты (для натягивания тетивы), но основное применение кривошип по-прежнему имел в точильном деле.

И лишь в 20-х гг. XV в., через тысячелетие после изобретения кривошипа и через пятьсот с лишним лет после его появления в Европе, во Фландрии додумались до плотницкого коловорота (одно из первых изображений 1424 г. существует в алтаре церкви Св. Фомы). В Италии концепция дрели появилась чуть позднее. Среди чертежей инженера Джованни да Фонтана есть её зарисовка, сделанная в 1429 г. В том же десятилетии был наконец придуман кривошипно-шатунный механизм, который использовался для помповых насосов и лесопилок с ветровым или водяным приводом.

Но, конечно, новую жизнь кривошип в составе кривошипно-шатунного механизма получил после создания паровозов, пароходов, а затем и автомобилей.

Кривошипно-шатунный механизм является одним из самых используемых механизмов в машиностроении. Везде, где нужно преобразовать вращательное движение в поступательно-возвратное, используется КШМ: двигатели, поршневые компрессоры, кривошипные прессы, железнодорожные локомотивы, швейные машинки, приводы лесопилок и многое-многое другое.

5.9. Планетарная передача. Дифференциал

В передаче с двумя зубчатыми колёсами положение одного колеса однозначно определяет положение другого. Но существуют зубчатые передачи, в которые вводят дополнительные зубчатые колёса, разрешающие многовариантное движение. А такие передачи нам очень нужны!

Действительно, правое и левое колёса поворачивающего автомобиля движутся по-разному, поскольку проходят разные пути. Для ведомых колёс здесь нет никакой проблемы — сила трения заставит их двигаться так, как нужно. А вот ведущие! Ведь их вращает двигатель, и если он передаст правому и левому колёсам одинаковую мощность, то они будут одинаково вращаться и, значит, обязательно возникнет проскальзывание колёс относительно дороги. А это — стирание покрышек и, что ещё хуже, неправильная работа силы трения и плохо управляемый в поворотах автомобиль.

И вершиной (не побоимся так сказать!) передаточных механизмов, которые изобрело человечество, стал **дифференциал** — механизм, который способен самостоятельно передавать правому и левому колёсам автомобиля такую мощность, которая нужна для эффективного прохождения поворотов. Главной деталью дифференциала является **планетарная передача** — передаточный механизм, в котором передача движения от вала двигателя двум осям может осуществляться по-разному.

В 20-х гг. XIX в. французский инженер **Онесифор Пеккёр**, руководивший мастерской в парижской школе искусств и ремёсел, занимался созданием собственного парового двигателя. Двигатель был создан, а вот когда Пеккёр попробовал передать движение двигателя колёсам, он понял, что в поворотах передавать вращение правому и левому колёсам нужно по-разному. Ведь они проходят разное расстояние и, следовательно, должны иметь разные скорости, и, значит, передача мощности должна быть дифференциальной. Но чтобы так было, механизм должен иметь два ведомых вала. А это означает, что механизм должен содержать больше зацепляющихся колёс, чем валов!

И Пеккёр создал механизм, передающий мощность двум валам, причём в зависимости от внешних условий способный передавать её по-разному. Главной идеей Пеккёра было вставить между двумя зубчатыми колёсами систему дополнительных колёс, способных вращаться и вокруг своей оси, и вокруг ведущей шестерни. Пеккёр хотел приспособить свой механизм, который получил название планетарного за некоторую схожесть расположения шестерён с расположением планет в планетных системах, к повороту паровоза. Но у последней задачи нашлось более простое решение (см. задачу 5.4), и об изобретении Пеккёра забыли на 100 лет. Только в XX в. Фердинанд Порше приспособил планетарную передачу к работе своего автомобиля. Потом были «Альфа Ромео», «Феррари», «Кадиллак» и другие марки машин. Все современные машины оснащаются дифференциалами.

Планетарная передача представляет собой набор зацеплённых зубчатых колёс (рис. 5.15), из которых ведущим является центральное колесо с внешним зацеплением — солнечная шестерня. На рисунке солнечная шестерня показана жёлтым. Центральное колесо с внутренним зацеплением называется коронной шестернёй. Механизм имеет ещё несколько колёс, расположенных между центральной и коронной шестернями. Они называются сателлитами (показаны синим на рисунке; их количество может быть различным). Сателлиты

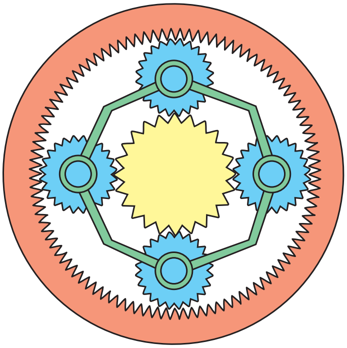


Рис. 5.15

могут вращаться вокруг своих осей и вокруг солнечной шестерни. Они соединены друг с другом жёсткой конструкцией, называемой водилом. Водило представляет собой рычаг, соединяющий оси шестерён-сателлитов, или «пространственную вилку», ось которой совпадает с осью механизма, оси «зубцов вилки» — с осями шестерён-сателлитов, и эта «пространственная вилка» может вращаться вокруг оси механизма.

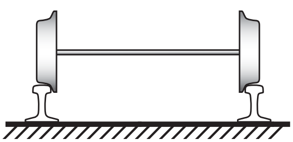
Название «планетарный механизм» данная конструкция получила благодаря определённому сходству с планетной системой: вокруг центральной звезды вращаются планеты, которые также вращаются вокруг своих осей.

Главная цель планетарного механизма — различная (дифференциальная) передача вращения с солнечной шестерни коронной шестерне и водилу. Можно заблокировать коронную шестерню, тогда вращение солнечной шестерни будет целиком передаваться водилу. А можно заблокировать водило и передавать вращение с солнечной на коронную шестерню.

Как же планетарный механизм «определяет», какую долю мощности нужно передать валу, связанному с коронной шестернёй, какую — валу, связанному с водилом? Это определяется силами, тормозящими валы. При условии равномерного вращения колёс дифференциала моменты сил, действующие на колёса со стороны ведущего вала, и моменты сил сопротивления должны уравновешивать друг друга. Эти моменты и будут определять передачу вращения. Если, например, колесо, связанное с одним из ведомых валов, начинает проскальзывать относительно дороги, возрастает действующая на него сила трения, тогда должна уменьшиться угловая скорость, передаваемая этому валу (см. задачу 5.5), и большее вращение передастся другому валу. Конечно, если на поворотах нажимать до упора педаль газа, никакие дифференциалы не помогут, и автомобиль занесёт.

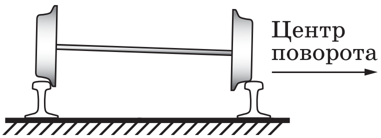
5.10. Поворот колёсного устройства

Существует ряд колёсных устройств, которые могут обойтись без дифференциала. Это полноприводные автомобили, спортивные заднеприводные автомобили для гонок на покрытиях с низким коэффициентом сцепления, мотоблоки и «средства малой механизации» с узкой колеёй колёс ведущей оси. Нет дифференциалов также у железнодорожных локомотивов. Здесь поворот происходит за счёт конической поверхности колёс и уменьшения межрельсового расстояния на поворотах. Давайте подробно рассмотрим принципы поворота железнодорожного локомотива.



Задача 5.4. Известно, что железнодорожные рельсы делают выпуклыми, колёса поезда насажены на одну ось (колёсная пара) и имеют коническую форму, причём их внутренний диаметр больше внешнего (см. рисунок). Объясните, зачем это делается.

Решение. Поскольку колёса вращаются одинаково (одна ось вращения), они поворачиваются на один и тот же угол за одно и то же время. Поэтому они имеют одинаковую угловую скорость. Но если колесо не проскальзывает относительно рельса, его угловая скорость вращения есть $\omega = v / R$, где v — скорость движения центра колеса относительно земли, R — его радиус. Таким образом, если отсутствует проскальзывание колёс относительно рельсов, скорость движения колёс должна быть одинаковой в любой момент времени. Но это условие заведомо не выполняется при поворотах, когда ближнее к центру поворота колесо проходит меньший путь, чем дальнее. Это должно было бы привести (если не предпринимать специальных усилий) к проскальзыванию колеса относительно рельса, что вело бы к стиранию колёс, уменьшению возможностей управления поездом (поскольку сила трения равнялась бы своему максимальному значению) и ряду других нежелательных явлений.



Для борьбы с проскальзыванием колёс поезда при повороте принимаются различные меры, главной из которых является «конусность» колеса. При повороте поезд «отбрасывается» от центра поворота инерцией и колёсная пара смещается относительно рельсов в направлении от центра поворота (см. рисунок). А это приводит к тому, что колесо, ближнее к центру поворота, вращается по рельсу меньшим радиусом, чем дальнее от центра поворота колесо. Боковой сдвиг колёс относительно рельсов в направлении от центра поворота подбирается так, чтобы оба колеса не вращались.

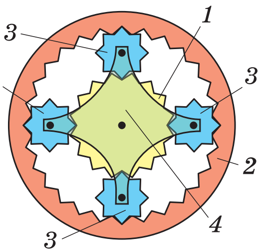
На переднеприводных автомобилях дифференциал должен быть обязательно: без дифференциала автомобиль не может нормально поворачивать и подвергается заносу на любом покрытии. Но не только для поворота автомобиля используется дифференциал. Планетарные передачи используются для суммирования двух потоков мощности. Например, два потока мощности могут подводиться к солнечной и коронной шестерням, а результирующий поток — сниматься с водила. В самолётах для надёжности часто используют два двигателя, работающие на общий выходной вал через суммирующую планетарную передачу: работоспособность привода при отказе одного двигателя сохраняется, но с двойным уменьшением частоты вращения.

Дифференциал работает, если оба вала испытывают сопротивление.

Если же для одного из них пропадает сопротивление, то вся мощность передаётся ему и возникает странная ситуация. Представим себе, что одно из колёс автомобиля потеряло сцепление с дорогой (например, попало в яму). Тогда вся мощность двигателя будет передаваться этому колесу (которое не сможет заставить двигаться машину), а второе колесо остановится. Чтобы избежать таких ситуаций, дифференциал современных автомобилей оснащается системой блокировки: при очень разных скоростях валов дифференциал блокируется и мощность делится между колёсами поровну независимо от движения машины. После восстановления баланса угловых скоростей дифференциал снова включается.

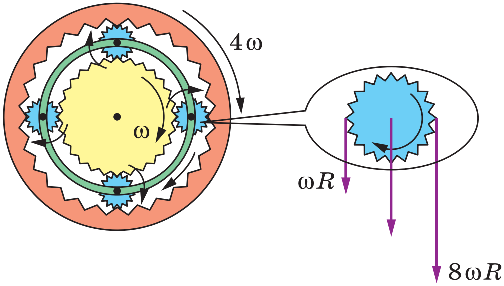
С точки зрения расположения шестерён в планетарном механизме он может быть плоским, а может быть объёмным (пространственным). Если все колёса механизма — и солнечное, и коронное, и сателлиты — лежат в одной плоскости, такой механизм является плоским и передаёт движение параллельным осям. Если же в механизме используют конические шестерни, планетарный механизм не только делит мощность двигателя на две оси, но и меняет направление оси вращения. Именно таким является межосевой дифференциал современных автомобилей.

Задача 5.5. Планетарная передача (см. рисунок) состоит из центральной (солнечной) шестерни (*1*), внешней (коронной) шестерни (*2*) и трёх-четырёх шестерён-спутников (*3*), которые соединены друг с другом с помощью водила (*4*) и могут вращаться вокруг своей оси каждая и все вместе вокруг солнечной шестерни, вращая водило. Такая передача позволяет передавать мощность от солнечной шестерни на коронную шестерню и водило в разных пропорциях. Пусть R — радиус солнечной шестерни, $2R$ — внутренний радиус коронной шестерни, ω — угловая скорость солнечной шестерни, 4ω — коронной; коронная и солнечная шестерни вращаются в одном направлении. Определите угловые скорости вращения шестерён-спутников вокруг своих осей и угловую скорость водила. Какой будет угловая скорость водила, если угловая скорость солнечной шестерни ω, а коронная шестерня заблокирована? Какой будет угловая скорость коронной шестерни, если угловая скорость солнечной шестерни ω, а водило заблокировано?



Решение. Планетарная передача работает таким образом, что вращение с центральной (солнечной) шестерни передаётся одновременно водилу и коронной шестерне, причём кинематически распределение вращения между ними не определяется (недостаточно кинематических связей). Это позволяет в зависимости от момента торможения коронной шестерни и водила передавать им разное вращение.

Рассмотрим работу планетарной передачи. Пусть центральная (солнечная) шестерня вращается с угловой скоростью ω, а её радиус R. Тогда линейная скорость точек на поверхности солнечной шестерни равна ωR, и такой же будет линейная скорость точек на поверхности шестерён-спутников, касающихся солнечной шестерни. Линейная скорость точек на внешней стороне шестерён-спутников равна линейной скорости точек на внутренней поверхности коронной шестерни, т. е. $8\omega R$. Найдём скорость центра шестерни. В системе отсчёта, связанной с её центром, эти точки имеют одинаковые по значению и противоположно направленные скорости. Пусть эти скорости равны v_0, а скорость центра солнечной шестерни — v_1. Тогда по закону сложения скоростей имеем



$$\begin{aligned} \omega R &= v_1 - v_0, \\ 8\omega R &= v_1 + v_0. \end{aligned} \qquad (*)$$

Складывая и вычитая эти уравнения, найдём линейную скорость центра спутниковой шестерни и скорость вращения точек её поверхности в системе отсчёта, связанной с центром шестерни:

$$v_1 = 4{,}5\omega R, \qquad v_0 = 3{,}5\omega R.$$

А поскольку радиус спутниковых шестерён равен R и их центры находятся на расстоянии $1{,}5R$ от центра водила, то угловые скорости спутниковых шестерён и водила равны

$$\omega_{\text{спут}} = \frac{3{,}5\omega R}{R} = 3{,}5\omega, \qquad \omega_{\text{вод}} = \frac{4{,}5\omega R}{1{,}5R} = 3\omega.$$

Если коронная шестерня заблокирована, то точки на поверхности шестерён-спутников имеют скорости ωR и 0, и из системы уравнений, аналогичной (*), имеем

$$\begin{aligned} \omega R &= v_1 - v_0, \\ 0 &= v_1 + v_0. \end{aligned}$$

Находим:

$$\omega_{\text{спут}} = -\frac{0{,}5\omega R}{R} = -0{,}5\omega, \qquad \omega_{\text{вод}} = \frac{0{,}5\omega R}{1{,}5R} = 0{,}33\omega.$$

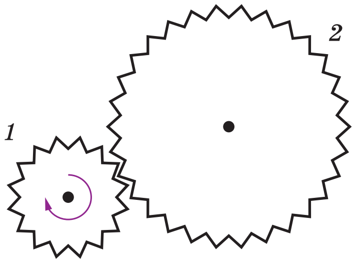
Здесь знак «минус» означает, что шестерни-спутники вращаются в противоположную сторону — против часовой стрелки. Если заблокировано водило, то спутниковые шестерни только вращаются и, следовательно, точки на их поверхности имеют линейные скорости, равные ωR. Поэтому и внутренние точки коронной шестерни имеют такую же линейную скорость, а поскольку они находятся на расстоянии $2R$ от её центра, то коронная шестерня в этом случае вращается в противоположную сторону с угловой скоростью $\omega/2$.

5.11. Нужны ли нам будут шарниры через 300 лет

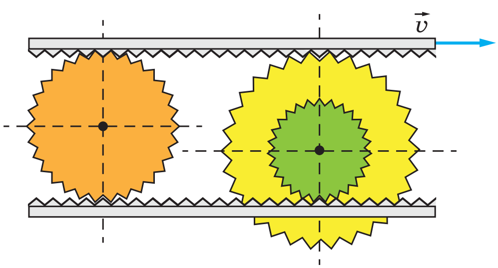
Очень многое из того, что создаётся в сегодняшней жизни, является виртуальным — это разнообразные интернет-технологии, без которых мы, кажется, уже и не можем обойтись. Но без «реальных» технологий — дорог, мостов, продуктов, машин — человечество тоже не может. И никогда не сможет! Нам всегда нужно будет ездить, может быть, летать, но никак не переноситься из одного места в другое виртуально. Нам нужно будет производить продукты, а для этого мало компьютеров — нужна земля, тракторы и дороги. Нужна работа руками, лопатами, тракторами... Нужны станки и машины... И мы желаем нашим потомкам не дожить до такой жизни, когда в пробирках сама по себе будет расти какая-то еда, а люди — только открывать рты. А потому передающие движение шарниры — величайшее достижение человечества — будут нужны всегда!

Задачи для самостоятельного решения и задания

5.1. Имеются два зубчатых колеса — ведущее *1* и ведомое *2* (см. рисунок). Радиусы колёс относятся как $r_1 : r_2 = 1 : 3$. К ведущему колесу *1* приложен момент сил M_1, и оно вращается с угловой скоростью ω_1. Определите угловую скорость второго колеса и крутящий момент, который можно с него получить (снять).

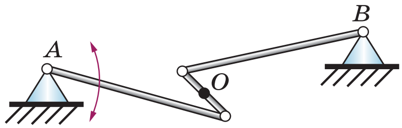


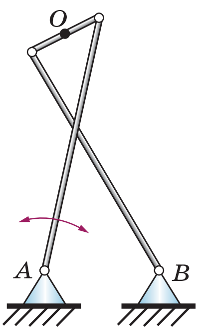
5.2. Трактор поворачивает так, что частота вращения одного из задних колёс равна $n_1 = 1{,}5$ об/с, другого — $n_2 = 1{,}4$ об/с. Расстояние между колёсами $l = 1{,}9$ м. Чему равен радиус поворота трактора?



5.3. Два зубчатых колеса помещены между горизонтальными зубчатыми рейками. Одно колесо одиночное, имеет радиус R, другое — ступенчатое, образовано двумя концентрическими колёсами радиусами $3R / 4$ и $5R / 4$, причём второе из них зажато между рейками большим и малым колёсами (см. рисунок). Верхняя рейка движется вправо со скоростью v. Сближаются или удаляются друг от друга колёса? Определите скорость центра правого колеса относительно центра левого.

5.4. Рассмотрите механизм, который называется параллелограммом Уатта (см. рисунок). Он состоит из двух одинаковых стержней, закреплённых шарнирно в точках A и B и связанных коротким стержнем. Пусть левый стержень поворачивается вокруг точки A. Как при этом движется середина O короткого стержня? Соберите механизм Уатта из конструктора с болтами и гайками. Проверьте, как работает механизм. Напишите программу, позволяющую проследить за его движением.





5.5. Рассмотрите устройство, которое называется механизмом Чебышёва. Оно состоит из двух длинных стержней и одного короткого (см. рисунок). Пусть левый стержень совершает повороты вокруг точки A. Как при этом движется середина O короткого стержня? Соберите механизм Чебышёва из конструктора с болтами и гайками. Проверьте, как работает механизм. Напишите программу, позволяющую проследить за движением механизма.

5.6. Напишите программу, которая позволила бы обеспечить движение механизма Липкина—Посселье (см. соответствующий раздел и задачу в настоящей главе) и продемонстрировать прямолинейное движение крайней точки механизма.

5.7. По материалам этой главы и интернет-источников напишите реферат на тему «Шарниры современного автомобиля».

5.8. По материалам этого параграфа и интернет-источников напишите эссе по истории зубчатых передач. Обратите внимание на различные виды передач, обсудите их достоинства и недостатки.

ГЛАВА 6

ТЕПЛО, СОЗДАЮЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ

Тепловые двигатели

6.1. Создание движения — цель двигателестроения

В предыдущих разделах вы познакомились с механизмами, преобразующими силы (рычаг, блок, клин) и виды движения (разнообразные передаточные механизмы и шарниры). Но прежде чем передать движение, его нужно создать, а для этого нужны двигатели. Именно такие механизмы — тепловые машины и электродвигатели — заставляют двигаться автомобили, промышленное оборудование и разнообразную бытовую технику.

Предназначение любого двигателя — получение механической работы, которую можно использовать для увеличения механической энергии какого-либо тела. Но согласно закону сохранения энергии работа есть мера изменения энергии какого-либо тела. Другими словами, получить работу можно, только отобрав энергию у какого-либо тела, причём энергию, существующую в разных формах. И здесь возможны варианты, если мы получаем механическую работу за счёт убыли внутренней (тепловой) энергии, такой двигатель называется тепловым, если за счёт убыли электрической энергии — электрическим двигателем, ядерной энергии — ядерным и т. д. Конечно, принципы работы тепловых, электрических и других двигателей относятся к термодинамике, электромагнетизму и другим разделам физики. Но вопрос о совершении механической работы за счёт других видов энергии, очевидно, граничит с механикой.

Рассмотрим сначала тепловые двигатели.

6.2. Вспоминаем термодинамику. Принцип работы тепловых двигателей

Тепловой двигатель — это устройство, которое совершает механическую работу за счёт внутренней энергии какого-то тела, которое называется в этом контексте **нагревателем** теплового двигателя. Работу в двигателе совершает, как правило, газ (рабочее тело двигателя), находящийся в цилиндрическом сосуде, закрытом герметичным, но подвижным поршнем.

Опыт, однако, показывает, что внутреннюю энергию, взятую у какого-то тела, нельзя полностью превратить в механическую работу в циклическом процессе. Это означает следующее. Если отобрать у какого-то тела часть его внутренней энергии, то можно превратить в механическую работу не всю эту энергию, а только какую-то её часть. Оставшаяся часть должна по-прежнему остаться внутренней энергией и должна быть передана телу с меньшей температурой. В применении к тепловому двигателю это означает, что наряду с рабочим телом и нагревателем двигателю необходимо ещё одно тело с температурой, меньшей температуры нагревателя, которому будет отдаваться та часть внутренней энергии нагревателя, которая не была превращена в работу. Такое тело называется **холодильником** двигателя.

Утверждение о невозможности работы теплового двигателя без холодильника в циклическом процессе называется **вторым началом (или законом) термодинамики.**

В результате за полный цикл работы двигателя (нагревание—расширение—охлаждение—сжатие), когда начальное и конечное состояния рабочего тела совпадают, в полезную механическую работу A в соответствии с законом сохранения энергии (первым законом, или первым началом, термодинамики) можно превратить только разность между тепловой энергией $Q_{нагр}$, полученной за цикл от нагревателя, и тепловой энергией $Q_{хол}$, отданной за тот же цикл холодильнику:

$$A = Q_{нагр} - Q_{хол}. \quad (6.1)$$

Отметим, что количество теплоты $Q_{хол}$, отданное рабочим телом холодильнику, согласно правилам знаков, принятым в термодинамике, считается величиной положительной.

Механическая работа A, совершаемая двигателем, — это тот полезный результат, который мы хотим получить. А поскольку нагреваем мы газ, сжигая топливо (дорогое!), то расходуемое на нагревание тепло $Q_{нагр}$ — это затраты, измеряемые в джоулях. Но из формулы (6.1) следует, что не всё тепло превращается в работу, а только его часть. Поэтому эффективность (КПД) двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_{нагр}} = \frac{Q_{нагр} - Q_{хол}}{Q_{нагр}} = 1 - \frac{Q_{хол}}{Q_{нагр}} = \frac{A}{A + Q_{хол}}. \quad (6.2)$$

Понятие коэффициента полезного действия теплового двигателя (КПД ещё часто называют термодинамическим коэффициентом полезного действия) было введено в физику великим французским физиком, создателем термодинамики Сади Карно.

Поскольку в соответствии с уравнением (6.1) работа двигателя обязательно меньше, чем количество теплоты $Q_{нагр}$, которое было получено от нагревателя за цикл, КПД теплового двигателя всегда строго меньше единицы.

Рассмотрим примеры определения КПД теплового двигателя.

Задача 6.1. Тепловой двигатель совершает за цикл работу 400 Дж и отдаёт холодильнику количество теплоты 600 Дж. Чему равен КПД двигателя?

Решение. Согласно определению КПД (6.2) имеем

$$\eta = \frac{A}{A + Q_{\text{хол}}},$$

где A — работа газа, $Q_{\text{нагр}}$ — количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику. Подставляя данные задачи, вычислим КПД:

$$\eta = \frac{400}{400 + 600} = 0{,}4.$$

Сади Карно (1796—1832) — французский физик и инженер. За свою короткую жизнь успел опубликовать всего одну небольшую работу — «Размышления о движущей силе огня и о машинах, способных развивать эту силу». В этой работе Карно первым исследовал принципы работы тепловых двигателей и процессы превращения внутренней энергии в механическую. Несмотря на то что тепловые двигатели существовали и работали до Карно, физики не понимали даже основные принципы их работы. Карно первым осознал необходимость холодильника в двигателе, ввёл понятие КПД, построил идеальный тепловой двигатель (с максимальным КПД), который работает по циклу, получившему название «цикл Карно». Сформулировал второе начало термодинамики как утверждение о невозможности получения механической работы без разности температур.

Первоначально работа Карно не была замечена. Она стала широко известна уже после его смерти благодаря Б. Клапейрону, который в 1834 г. переопубликовал работу Карно, придав его идеям доступную всем математическую форму.

Сади Карно умер в 36 лет от холеры, эпидемия которой свирепствовала в Европе. Архив учёного пролежал много лет у его брата, и только через 50 лет после смерти Карно некоторые части архива были опубликованы. В этих незаконченных работах Карно гораздо раньше Майера, Джоуля и Гельмгольца сформулировал первое начало термодинамики, но узнали об этом на 15—20 лет позже их открытия. Поэтому С. Карно с полным правом можно считать основателем термодинамики.

На заре двигателестроения инженеры мирового уровня были и в нашей стране: Ползунов, чуть позже отец и сын Черепановы. Причём их работы не были какими-то кустарными, а были результатом развития науки в России во времена Петра I и Екатерины II.

Иван Иванович Ползунов (1728—1766) — выдающийся русский инженер, создатель первой двухцилиндровой паровой машины. Родился и вырос в Екатеринбурге, но всю свою недолгую жизнь работал на Барнаульском металлургическом заводе, где в заводской библиотеке (это в середине VIII в.!) познакомился с книгой И. В. Шлаттера, в которой была приведена схема одноцилиндровой паровой машины Ньюкомена. И Ползунов загорелся идеей создания паровой машины, которую он хотел использовать для приведения в движение воздуходувных мехов (в то время эта работа выполнялась либо вручную, либо с использованием водяного привода). В конструкцию машины Ньюкомена он вносит массу изменений, из которых главное — наличие двух цилиндров, работающих в противофазе. В 1764 г. Ползунов приступает к строительству. Все свои силы он отдаёт работе над машиной. Огромное перенапряжение сил, работа в холодных, неотапливаемых помещениях подорвали здоровье Ползунова — у него развивается чахотка. Чувствуя близкий конец, он торопится завершить главное дело своей жизни. Но не успевает. 16 мая 1766 г. Ползунов умирает в возрасте 38 лет, не дожив ровно одну неделю до пуска своего двигателя.

Машина, аналогов которой не было в мире, была запущена 23 мая 1766 г. И она работала! Это было почти чудо — в Барнауле, в центре Сибири на металлургическом заводе работала огромная (высотой с трёхэтажный дом) паровая машина мощностью 40 лошадиных сил (европейские аналоги развивали мощность не более 10 лошадиных сил), раздувающая плавильные печи без участия человека. Машина проработала 43 дня, после чего была остановлена, так как выявился ряд дефектов, исправить которые было уже некому... За время работы машины было выплавлено более 14 пудов серебра и 14 фунтов золота. Доходы от её эксплуатации (скрупулёзно подсчитанные бухгалтерами) вдвое превысили затраты на создание. Тем не менее было решено машину далее не эксплуатировать. 15 лет машина Ползунова простояла без работы и в 1782 г. была разобрана. А через два года англичанин Уатт получил патент на паровой двигатель, переоткрыв многие находки Ползунова. Двигатель Уатта завоевал вскоре признание и принёс изобретателю всемирную славу.

6.3. КПД теплового двигателя

В теории тепловых двигателей часто приходится вычислять КПД того или иного процесса, по которому работает двигатель. Поскольку КПД показывает, какую долю внутренней энергии, взятой у нагревателя, двигатель превращает в работу, то для вычисления КПД и нужно знать эти две величины — внутреннюю энергию, полученную двигателем от нагревателя, и совершённую им работу. При вычислениях можно придерживаться примерно такого плана:

1) с помощью первого закона термодинамики по знаку количества теплоты, полученной рабочим телом, установить те участки процесса, в которых рабочее тело двигателя контактировало с нагревателем;

2) применяя первый закон термодинамики к этим участкам процесса, определить количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя при изменении тех или иных макроскопических параметров;

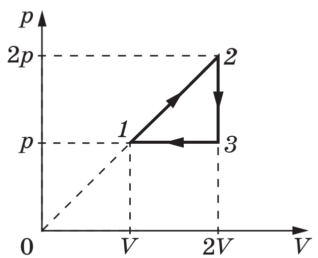
3) определить работу, совершённую рабочим телом в течение цикла. Это можно сделать, вычислив либо площадь фигуры, ограниченной графиком цикла на графике p—V, либо разность количества теплоты, полученной от нагревателя, и количества теплоты, отданной холодильнику;

4) по формуле (6.2) рассчитать КПД.

Надо помнить, что работа газа в том или ином процессе есть площадь под графиком зависимости давления от объёма в рассматриваемом процессе. Конечно, площадь не в квадратных метрах или сантиметрах, а в паскалях (высота графика), умноженных на кубический метр (основание графика), т. е. в единицах энергии:

$$\text{Па} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}^2} \cdot \text{м}^3 = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} = \text{Дж}.$$

Рассмотрим следующий пример.



Задача 6.2. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс *1—2—3—1*, график зависимости давления от объёма для которого приведён на рисунке (процесс *2—3* является изохорическим, процесс *3—1* — изобарическим, на участке *1—2* давление является линейной функцией объёма, причём продолжение прямой *1—2* проходит через начало координат). Определите коэффициент полезного действия этого процесса.

Решение. Ответим сначала на вопрос о том, на каких участках процесса газ контактирует с нагревателем, на каких — с холодильником. В процессе *1—2* газ расширяется и, следовательно, совершает положительную работу $A_{1-2} > 0$. В этом процессе растёт температура газа (это можно увидеть, применяя закон Менделеева—Клапейрона к состояниям *1* и *2*) и потому увеличивается его внутренняя энергия: $\Delta U_{1-2} > 0$. Поэтому из первого закона термодинамики следует, что

$$Q_{1-2} = A_{1-2} + \Delta U_{1-2} > 0.$$

Значит, в течение всего процесса *1—2* газ контактировал с нагревателем.

В процессе *2—3* не изменяется объём газа и газ не совершает работу: $A_{2-3} = 0$. Температура газа в этом процессе уменьшается, т. е. $\Delta U_{2-3} < 0$. Следовательно, в процессе *2—3* (и на любом его участке) газ отдавал тепло:

$$Q_{2-3} = A_{2-3} + \Delta U_{2-3} < 0,$$

т. е. газ в течение всего процесса контактировал с холодильником.

Аналогичное рассмотрение процесса *3—1* приводит к неравенству

$$U_{3-1} < 0$$

и выводу о том, что газ контактировал с холодильником в течение всего этого процесса.

Применяя теперь первое начало термодинамики к процессу *1—2*, найдём количество теплоты, полученное газом от нагревателя в течение цикла:

$$Q_{\text{нагр}} = Q_{1-2} = A_{1-2} + \Delta U_{1-2}. \tag{*}$$

Приращение внутренней энергии газа в процессе *1—2* найдём по закону Менделеева—Клапейрона:

$$\Delta U_{1-2} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{1-2} = \frac{3}{2}\left(\nu RT_2 - \nu RT_1\right) = \frac{3}{2}\left(2p2V - pV\right) = \frac{9}{2}pV, \tag{**}$$

где ν — количество вещества газа, R — универсальная газовая постоянная, T_2 и T_1 — температуры газа в состояниях *2* и *1*.

Работу газа в процессе *1—2* определим как площадь фигуры под графиком процесса в координатах p—V. Поскольку фигура эта трапеция, то

$$A_{1-2} = \frac{\left(p + 2p\right)}{2}\left(2V - V\right) = \frac{3}{2}pV. \tag{***}$$

Теперь из равенств (*)—(***) находим

$$Q_{\text{нагр}} = \frac{9}{2}pV + \frac{3}{2}pV = 6pV. \tag{4*}$$

Работу газа в течение цикла найдём как площадь цикла в координатах p—V. Поскольку цикл на графике зависимости давления от объёма представляет собой прямоугольный треугольник с основанием V и высотой p, то

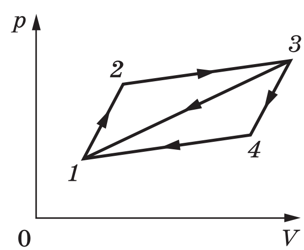
$$A = \frac{1}{2}pV. \tag{5*}$$

Из формул (4*) и (5*) находим коэффициент полезного действия процесса:

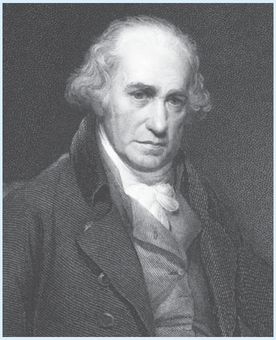
$$\eta = \frac{A}{Q_{\text{нагр}}} = \frac{1}{12}.$$

Этот результат показывает, что только одна двенадцатая часть энергии, полученной газом от нагревателя в процессе *1—2*, идёт на совершение механической работы, остальная часть остаётся внутренней энергией и передаётся холодильнику в процессах *2—3* и *3—1*.

Существует большая группа задач, в которых задаётся не процесс, происходящий с рабочим телом, а соотношение параметров разных процессов, по которым нужно связать их КПД. Рассмотрим пример такой задачи.



Задача 6.3. КПД циклического процесса *1—2—3—4—1*, график которого в координатах p—V представляет собой параллелограмм (см. рисунок), равен η. Определите КПД циклического процесса *1—3—4—1*.



Джеймс Уатт (1736—1819) — инженер, внёсший самый большой вклад в создание паровых машин. Он предложил устройство, позволяющее преобразовывать поступательное движение поршня во вращательное (параллелограмм Уатта), изобрёл регулятор оборотов, парораспределитель, пружинный индикатор для исследования процессов, протекающих в цилиндре, и многое другое. Возникла возможность использовать паровую машину на транспорте — так появились пароходы и паровозы. После привлечения к своей работе крупного предпринимателя Болтона и создания фирмы «Болтон и Уатт» Уатт добился и коммерческого успеха — он стал весьма состоятельным человеком.

Уатт стал первопроходцем и ещё в одном деле. Он предложил ввести единицу мощности — лошадиную силу; в честь этого события Британская ассоциация инженеров в 1882 г. решила присвоить его имя единице мощности (позже этот путь повторили Ньютон, Паскаль, Фарадей, Ампер, Ом и другие знаменитые физики и инженеры).

Российская академия наук приглашала Уатта работать в России с ежегодным жалованьем в 1000 фунтов стерлингов (огромные деньги; Фарадей, будучи лаборантом Королевского общества, получал около 30 фунтов в год), что вызвало настоящий переполох в Англии. Поэт Эразм Дарвин (дед Чарльза Дарвина) написал в письме Уатту: «О Боже, как я был напуган, когда услышал, что русский медведь зацепил Вас своей громадной лапой и тянет в Россию! Умоляю не ездить, если только это возможно... Я надеюсь, что Ваша огненная машина оставит Вас здесь» [18]. Уатт остался в Англии.

Решение. Пусть в процессе *1—2—3—4—1* газ совершил работу A. Так как работа газа в циклическом процессе численно равна площади цикла в координатах p—V, то в процессе *1—3—4—1* газ совершил работу $A/2$.

Очевидно, в процессе *1—2—3—4—1* газ получает тепло на участках *1—2* и *2—3*, в процессе *1—3—4—1* — на участке *1—3*. Поэтому

$$\eta = \frac{A}{Q_{1-2-3}}, \qquad \eta_1 = \frac{A/2}{Q_{1-3}}.$$

В то же время, в цикле *1—3—4—1* такой же контакт с холодильником, как и в цикле *1—2—3—4—1*. И следовательно, количества теплоты, отданные в циклах *1—2—3—4—1* и *1—3—4—1* холодильнику, одинаковы. Поэтому формулы для КПД удобно записать через количества теплоты, отданные холодильнику:

$$\eta = \frac{A}{A + Q_{3-4-1}}, \qquad \eta_1 = \frac{A/2}{A/2 + Q_{3-4-1}}.$$

Выражая из первой формулы количество теплоты Q_{3-4-1}, отданное рабочим телом в процессе *3—4—1*, и подставляя во вторую, получим

$$\eta_1 = \frac{\eta}{2 - \eta}.$$

6.4. Идеальный тепловой двигатель Карно

Французский физик и инженер С. Карно доказал, что среди всех процессов, использующих некоторое тело с температурой T_1 в качестве нагревателя и некоторое другое тело с температурой T_2 ($T_2 < T_1$) в качестве холодильника, максимальным КПД обладает процесс, состоящий из двух изотерм (при температурах нагревателя T_1 и холодильника T_2) и двух адиабат (рис. 6.1). Этот процесс называют **циклом Карно**. Напомним, что адиабатическое сжатие и адиабатическое расширение — это процессы, которые происходят без обмена теплом с окружающей средой и/или другими телами (нагревателем и холодильником). Поэтому производить такое сжатие или расширение нужно достаточно быстро, чтобы тепло не успело пройти через стенки сосуда, содержащего рабочее тело. Изотермический процесс, напротив, требует активного обмена теплом с другими телами: при изотермическом расширении тепло следует подводить от нагревателя, а при изотермическом сжатии — отдавать холодильнику.

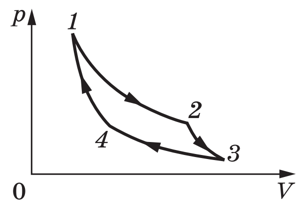


Рис. 6.1

Изотермам на графике соответствуют участки *1—2* (при температуре нагревателя T_1) и *3—4* (при температуре холодильника T_2), адиабатам — участки графика *2—3* и *4—1*.

КПД цикла Карно определяется соотношением

$$\eta_{\text{Карно}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (6.3)$$

Эта формула показала инженерам и физикам, в каком направлении нужно двигаться, чтобы повышать КПД тепловых двигателей: увеличивать температуру нагревателя и уменьшать температуру холодильника. И ещё Карно доказал, что для увеличения КПД двигателя нужно избегать передачи тепла от горячего тела к холодному, а передавать тепло при одинаковых температурах тел.

Однако на практике реализовать двигатель, работающий по циклу Карно, очень трудно, в частности из-за необходимости чередовать быстрые адиабатические и медленные изотермические процессы. Чтобы избежать медленных фаз нагревания и охлаждения рабочего тела через стенки сосуда, можно попробовать греть его, сжигая топливо непосредственно в контакте с рабочим телом — внутри цилиндра. Такой двигатель называют **двигателем внутреннего сгорания**. Он был изобретён также в XIX в., и это изобретение является несомненным шедевром инженерной мысли.

6.5. Двигатель внутреннего сгорания — шедевр технической термодинамики

С начала XIX в. непрерывно предпринимались попытки создать работоспособный двигатель внутреннего сгорания — двигатель, в котором нагреватель находился бы внутри цилиндра двигателя. Основная идея такого двигателя заключается в том, что из его работы исключена «медленная» стадия теплопроводности и двигатель является практически безынерционным. На автомобиле мы можем поехать практически сразу после завода двигателя, а вот на паровозе нужно ждать, когда закипит вода в котле двигателя, т. е. когда тепло из топки пройдёт в котёл и нагреет воду.

Главной трудностью здесь был подбор топлива, способного сгорать в цилиндре практически мгновенно. Пробовались разные варианты (в том числе и экзотические): угольная пыль, которая может взрываться благодаря большой площади поверхности, светильный газ (смесь водорода, метана, угарного газа, получаемая при нагревании древесины или угля без доступа кислорода) и даже ликоподий — высушенные семена растения плаун.

Впервые двигатель внутреннего сгорания на светильном газе был реализован французом бельгийского происхождения Жаном Этьеном Ленуаром. Потом был француз Альфонс Бо де Роша, первым понявший важность сжатия рабочей смеси до поджигания. Но настоящий прорыв в двигателестроении произошёл благодаря работам немецкого инженера Николауса Отто, который соединил все эти возможности.

Рассмотрим принцип работы двигателя внутреннего сгорания (ДВС), «найдём» у него холодильник и убедимся, что существование этого холодильника, с одной стороны, позволяет ДВС работать, а с другой — приводит к потерям энергии и снижает эффективность его работы.

Нагревателем ДВС является сгорающий внутри двигателя бензин, выделившаяся при сгорании энергия нагревает воздух в цилиндрическом сосуде (который называется просто цилиндром двигателя). Рабочим телом ДВС является смесь воздуха и бензина, причём масса бензина составляет всего несколько процентов от массы воздуха в двигателе. Поэтому в первом приближении считают, что рабочим телом является воздух, и пренебрегают изменением его химического состава в результате сгорания бензина.

Смесь воздуха и бензина готовится в двигателе следующим образом. С помощью системы клапанов и фильтров в цилиндр поступает атмосферный воздух при атмосферном давлении (состояние *1* на рисунке 6.2). Затем в этот воздух впрыскивается бензин и смесь воздуха и бензина сжимается с помощью поршня (процесс *1—2*). Поскольку сжатие смеси воздуха и бензина происходит достаточно быстро, за это время смесь не успевает обменяться теплом с окружающей средой, поэтому процесс сжатия *1—2* адиабатический.

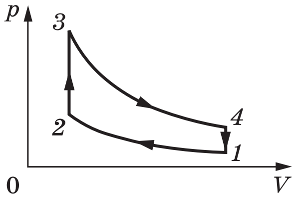


Рис. 6.2

После этого бензин поджигается (в состоянии *2*) и сгорает. Сгорание бензина происходит ещё быстрее, чем сжатие смеси на предыдущем этапе (практически мгновенно); за это время поршень не успевает сдвинуться, т. е. объём воздуха в двигателе не успевает измениться, поэтому можно считать, что этот процесс — изохорическое нагревание (участок *2—3*).

Затем горячий газ внутри двигателя толкает поршень и совершает работу; этот процесс является адиабатическим, поскольку теплообмен между горячим газом в двигателе и окружающей средой за время расширения практически не происходит (участок *3—4*).

Николаус Отто (1832—1891) — выдающийся немецкий инженер. Создатель первого коммерчески успешного двигателя внутреннего сгорания. За 120 лет с момента создания первых автомобилей в них изменилось всё — дизайн, колёса, топливо, производители... Не изменилось только одно: количество тактов работы двигателя. Их всегда было четыре: впуск, сжатие, рабочий ход, выпуск. А придумал такую последовательность и создал первый работоспособный двигатель внутреннего сгорания немецкий изобретатель-самоучка Николаус Отто.

Изобретали двигатели внутреннего сгорания и до Отто. Но вспышки горючей смеси в этих моделях происходили настолько неожиданно, что обеспечить ровную передачу мощности было невозможно. Отто удалось решить эту проблему, использовав идею четырёхтактного двигателя со сжатием горючей смеси. Отто разработал также механизм синхронизации впрыска и сгорания топлива, правильно подобрал горючую смесь и реализовал все свои идеи «в железе». В 1877 г. Н. Отто получил патент на свой четырёхтактный агрегат, а за последующие 20 лет было продано 42 тысячи двигателей. КПД двигателей Отто доходил до 22 %, что было значительно выше, чем КПД любых других двигателей того времени. Удачная конструкция и высокая экономичность двигателей Отто позволили его компании занять почти монопольное положение на рынке двигателей.

Если теперь сжать воздух в двигателе (чтобы вернуть его в начальное состояние), то необходимо будет совершить ту же работу, которую совершил воздух в процессе расширения, и в результате не будет произведено полезной работы. Поэтому перед сжатием воздух в двигателе необходимо охладить. Однако ждать его охлаждения благодаря теплообмену с окружающей средой пришлось бы очень долго. Поэтому охлаждение рабочего тела в двигателе внутреннего сгорания производится так: клапаны открывают отверстия в цилиндре, горячий воздух выбрасывается из двигателя (состояние *4*) и заменяется холодным атмосферным воздухом. Поскольку в этом процессе объём двигателя не меняется, то можно считать, что этот процесс — изохорическое охлаждение (участок *4—1*). Затем клапаны закрывают отверстия в двигателе, впрыскивается бензин, и процесс повторяется.

Таким образом, если пренебречь небольшими изменениями массы и химического состава воздуха в двигателе внутреннего сгорания в процессе работы, то цикл двигателя состоит из двух изохор и двух адиабат (см. рис. 6.2).

Этот циклический процесс впервые был осуществлён в 1876 г. немецким инженером Н. Отто и называется **циклом Отто**.

При этом в изохорическом процессе *2—3* газ в двигателе получает внутреннюю энергию нагревателя (сгорающего бензина). Куда же эта внутренняя энергия расходуется? Часть этой энергии расходуется на совершение полезной работы в процессе *3—4*. Однако другая часть выбрасывается вместе с горячим газом в окружающий воздух, который и является холодильником двигателя. Другими словами, часть внутренней энергии, взятой у нагревателя, уходит в процессе *4—1* на «отопление улицы»!

Создание автомобиля (XVII—XIX вв.). Идею двигателя внутреннего сгорания (ДВС) сформулировал в XVII в. **Х. Гюйгенс**, предложив использовать в качестве топлива порох. Первый работающий ДВС создали в 1806 г. французские изобретатели **братья Ньепсы**, использовав в качестве топлива угольную пыль, которая может взрываться. В 1799 г. французский инженер **Ф. Лебон** открыл светильный газ (смесь водорода, метана и окиси углерода, получаемую путём перегонки угля или древесины), а позже попытался сконструировать газовый ДВС.

Первый успешный ДВС создал в 1858 г. **Ж. Ленуар**, который разработал принцип воспламенения газовой смеси с помощью искры. На нём трёхколёсный прототип современных машин проехал исторические 20 км со скоростью 6 км/ч.

В 1877 г. немецкий инженер **Н. Отто** создал новый вид ДВС с четырёхтактным циклом, который лежит в основе большинства современных ДВС. КПД газового двигателя Отто составлял 22 %, что было значительно выше, чем у других двигателей того времени. Четырёхтактный цикл был самым большим техническим достижением Отто. Однако вскоре обнаружилось, что за несколько лет до Отто точно такой же принцип работы двигателя был описан французом **А. Бо де Рошем**. Группа французских промышленников оспорила в суде патент Отто.

Хотя конкуренты тоже наладили выпуск четырёхтактных двигателей, модель Отто была лучшей по экономичности и надёжности, и спрос на неё был устойчивым. К 1897 г. было выпущено около 42 тыс. таких двигателей разной мощности. Однако в качестве топлива в них использовался светильный газ, что сильно суживало область применения первых ДВС. Поэтому не прекращались попытки применить жидкое топливо. Но для того чтобы двигатель на жидком топливе мог работать, необходимо было создать специальное устройство для испарения топлива и получения его смеси с воздухом (именно такая смесь может взрываться). Этим устройством стал карбюратор, который создали венгр Донат Банки и чех Янош Чонка.

Первый работоспособный бензиновый двигатель был создан немецким инженером **Готлибом Даймлером**. Уйдя от Отто и основав вместе со своим другом Вильгельмом Майбахом собственную фирму, в 1885 г. изобретатели создали первое двухколёсное транспортное средство («Reitwagen»), а через год и первый прототип четырёхколёсного автомобиля на бензиновом двигателе с карбюратором Банки.

Одновременно в 1886 г. немецкий инженер **Карл Бенц** запатентовал конструкцию первого в мире трёхколёсного газового автомобиля с электрическим зажиганием и водяным охлаждением. Именно Бенц был первым, кому удалось совместить шасси и двигатель. Но машины Бенца продавались плохо, и к его «самобеглой коляске» все относились как к игрушке... И тогда его жена Берта Бенц с сыновьями совершила длинное путешествие — более чем на 100 км, не имея до этого никакого опыта езды на автомобиле. Очерк фрау Бенц об этом путешествии и отзывы очевидцев стали сенсацией. Люди бросились покупать автомобили. Причём женщины составили большинство первых покупателей... А Бенц после путешествия жены внёс в автомобиль целый ряд усовершенствований: после того как детям пришлось толкать автомобиль на подъёмах, фрау Бенц предложила мужу сделать коробку передач, позволяющую передавать мощность от двигателя колёсам с разными передаточными отношениями. И уже в 1893 г. автомобили Бенца стали первыми в мире транспортными средствами массового производства. А в 1900 г. Майбах создал автомобиль, который он назвал именем дочери представителя своей фирмы — Мерседес.

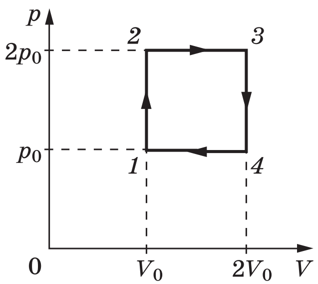
Автомобиль поехал по планете Земля...

Задачи для самостоятельного решения и задания

6.1. КПД идеальной тепловой машины, работающей по циклу Карно, составляет 50 %. Абсолютную температуру нагревателя увеличивают в 2 раза, температура холодильника не изменяется. Каким будет КПД получившейся идеальной тепловой машины?

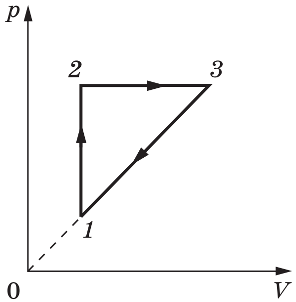
6.2. Цикл теплового двигателя длится 10 с. За это время двигатель получает от нагревателя количество теплоты 10 кДж и отдаёт холодильнику количество теплоты 3 кДж. Чему равна мощность двигателя?

6.3. Тепловой двигатель получает за цикл от нагревателя количество теплоты 100 Дж, а отдаёт холодильнику количество теплоты 30 Дж. Чему равен КПД двигателя?



6.4. Тепловой двигатель, КПД которого равен 20 %, в течение цикла отдаёт холодильнику количество теплоты 100 Дж. Какую работу совершает этот двигатель за цикл?

6.5. С одноатомным идеальным газом происходит циклический процесс *1—2—3—4—1* (процессы *1—2* и *3—4* являются изохорическими, процессы *2—3* и *4—1* — изобарическими), график которого в координатах p—V (давление—объём) приведён на рисунке. На рисунке приведены также значения давления и объёма газа по ходу цикла. Определите КПД процесса.



6.6. С идеальным одноатомным газом происходит замкнутый процесс *1—2—3—1*, график которого в координатах p—V (давление—объём) приведён на рисунке (процесс *1—2* — изохорический, процесс *2—3* — изобарический, на участке *3—1* давление является линейной функцией объёма). Известно, что работа, совершаемая газом в процессе *2—3*, в n раз больше количества теплоты, отданного газом в процессе *3—1*. Определите КПД цикла.

6.7. По материалам настоящей главы и интернет-источников напишите обзорный реферат по типам двигателей внутреннего сгорания в автомобилях. Обсудите достоинства и недостатки всех типов ДВС.

6.8. По материалам настоящей главы и интернет-источников напишите реферат по истории термодинамики. Обратите внимание на эволюцию взглядов физиков на природу теплоты.

6.9. По материалам настоящей главы и интернет-источников напишите реферат по истории создания тепловых двигателей.

ГЛАВА 7

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО, СОЗДАЮЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ

Электрические двигатели

7.1. Электродвигатели и электрогенераторы

В предыдущей главе мы рассказали о тепловых машинах, позволяющих преобразовывать тепловую энергию сжигаемого топлива в энергию механического движения. В этой главе познакомимся с электрическими машинами, позволяющими получать механическую энергию из электрической энергии (электродвигатели) и обратно — превращать механическую энергию в электрическую (электрические генераторы). Но сначала давайте вспомним некоторые понятия, связанные с электромагнитными явлениями.

7.2. Униполярный электродвигатель

То, что с электричеством связана определённая энергия, стало ясно ещё в середине XVIII в. при первых опытах получения электрического заряда с помощью трения. Первый конденсатор, созданный Питером ван Мушенбруком в Лейдене (**лейденская банка**), при разряде (через самого Мушенбрука) произвёл такой сильный удар, что ему показалось, что «пришёл конец», а этот «новый и страшный опыт» он больше никогда не повторял и никому не советовал повторять.

Позже был создан первый гальванический элемент — **вольтов столб**.

Потом с помощью электричества научились получать свет — **электрическая дуга** (В. Петров в 1802 г. и Х. Дэви в 1808 г.). Потом получили тепло — при прохождении электрического тока в проводах. Но получить механическую энергию с использованием электрических явлений долго не удавалось. Ключ к успеху в этой области дали опыты Эрстеда, который в 1820 г. заметил действие тока на магнитную стрелку, и работы Ампера, который систематически исследовал действие магнитного поля на проводник с током.

После работ Ампера появилась возможность осуществить непрерывное действие магнитной силы на проводник, помещённый в магнитное поле, при прохождении по нему электрического тока. Вспомним основные законы действия магнитного поля на помещённый в него проводник с током.

Магнитное поле создаётся движущимися зарядами (или постоянными магнитами, внутри которых есть постоянные токи) и действует на движущиеся заряды. Силовой характеристикой магнитного поля является индукция магнитного поля — векторная физическая величина, позволяющая определять силы, с которыми магнитное поле действует на движущиеся заряды или на проводники с током.

Андре-Мари Ампер (1775—1836) — великий французский физик, математик и химик. В 1820 г. Ампер был сложившимся учёным-математиком, академиком Парижской академии наук, и ничто не предвещало перемен. Но их время неотвратимо приближалось. 4 и 11 сентября 1820 г. (это были понедельники — дни семинаров в Академии наук) Франсуа Араго сделал сообщения о работах Эрстеда, связанных со взаимодействием тока и магнита. Эти сообщения полностью захватили Ампера. И он, математик, не сделавший до этого ни одного физического эксперимента, отложил все дела и начал экспериментировать с магнитами и токами. За две последующие недели Ампер, переоборудовав свою квартиру в лабораторию, получил главные результаты своей жизни. Уже в следующий понедельник, 18 сентября, Ампер доложил о взаимодействии прямых токов, а ещё через неделю, 25 сентября, продемонстрировал взаимодействие катушек с током, сведя при объяснении магнитные взаимодействия к взаимодействию движущихся электрических зарядов.

Кроме математики и физики, Ампер занимался химией, биологией, философией, его последняя книга (вышедшая после его смерти) была посвящена классификации наук. Ампер любил придумывать новые термины. Именно он ввёл такие слова, как «электростатика», «электродинамика», «соленоид». Ампер высказал мысль о том, что в будущем возникнет новая наука о закономерностях процессов управления, и предложил назвать её **кибернетикой** (от др.-греч. κυβερνητικη, что означает «искусство управления»).

Существуют правила, которые позволяют находить индукцию магнитных полей, созданных теми или иными токами. Правила эти достаточно сложны, поэтому говорить о них мы не будем, отослав читателя к соответствующим учебникам [19—21]. Нам же понадобится только общее представление о магнитном поле катушки с током (соленоида), постоянного магнита и бесконечного прямого тока.

Для визуализации магнитного поля используют язык линий магнитной индукции.

Линии магнитной индукции — это воображаемые линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором индукции в этой точке, а их густота пропорциональна значению индукции.

На рисунках показаны линии индукции магнитного поля соленоида (рис. 7.1), постоянного магнита (рис. 7.2) и прямого тока (рис. 7.3). Отметим, что поле соленоида внутри катушки параллельно его оси и

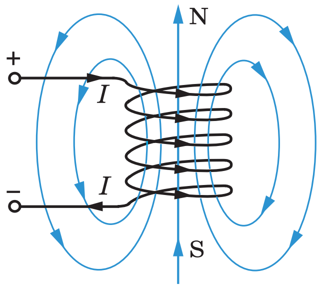


Рис. 7.1

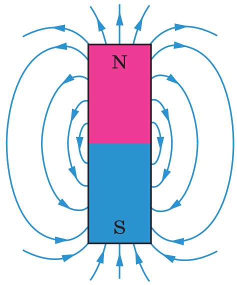


Рис. 7.2

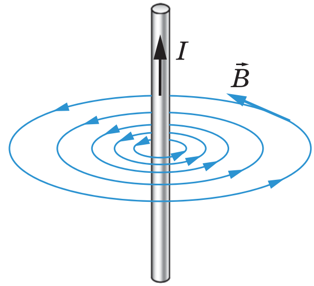


Рис. 7.3

практически однородно внутри катушки и около его краёв. Поле постоянного магнита похоже на поле соленоида вне катушки. Индукция магнитного поля бесконечного прямого провода с током во всех точках перпендикулярна проводу, а её значение убывает при увеличении расстояния от провода.

Пусть проводник длиной l, сила тока в котором равна I, помещён в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. На него со стороны магнитного поля действует сила, которая называется **силой Ампера:**

$$F_A = IBl\sin\alpha, \qquad (7.1)$$

где α — угол между током и вектором индукции.

Направление силы Ампера определяется следующим образом:

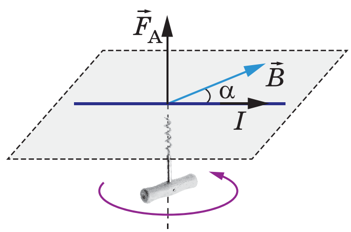


Рис. 7.4

1) сила Ампера $\vec{F}_A$ направлена перпендикулярно плоскости, в которой располагаются проводник и вектор индукции (на рисунке 7.4 плоскость, в которой лежат проводник и вектор индукции $\vec{B}$, показана пунктиром);

2) выбор между двумя направлениями перпендикуляра осуществляется по правилу буравчика (см. рис. 7.4). При вращении буравчика так, что его ручка поворачивается от линии тока к вектору индукции, направление его вкручивания показывает направление силы Ампера.

После работ Ампера стало ясно, что можно организовать постоянное вращение проводника в магнитном поле, т. е. превращать энергию поля в механическую энергию. Первую модель электрического двигателя предложил Фарадей.

В стаканчик с металлическим дном Фарадей налил ртуть, в которую опустил магнит. К металлическому штативу крепился гибкий провод, второй конец которого был опущен в ртуть. Когда Фарадей пропускал по проводу электрический ток (подключая гальванический элемент к дну стаканчика и штатива), провод начинал вращаться вокруг магнита (рис. 7.5). Стало понятно,

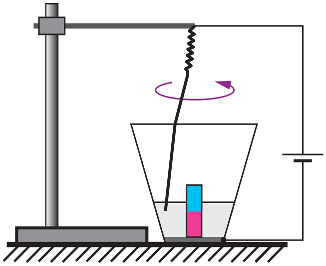


Рис. 7.5

что поле может совершать механическую работу. Конечно, эта работа была очень маленькая, как её можно использовать, было пока неясно...

А дальше инженеры стали придумывать, как сделать двигатель Фарадея эффективным.

Сделаем перерыв в историческом обзоре электродвигателестроения и попробуем разобраться, почему же работает двигатель Фарадея (который сейчас принято называть **униполярным**, поскольку этот двигатель работает на постоянном токе).

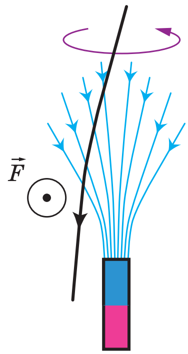
Майкл Фарадей (1791—1867) — великий английский физик. Автор ряда фундаментальных и прикладных открытий, в том числе закона электромагнитной индукции, законов электролиза, явления вращения плоскости поляризации света в магнитном поле. Фарадей экспериментально доказал, что свет — электромагнитное явление. В 1821 г. впервые осуществил вращение проводника с током вокруг магнита, создав первую лабораторную модель электродвигателя. В 1831 г. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции — возникновения электрического поля при изменении магнитного поля. Это явление можно без преувеличения назвать краеугольным камнем и теории электромагнитного поля, и основ электротехники.

Фарадей — физик-экспериментатор! — разработал концепцию теории электромагнитного поля и даже ввёл в науку этот термин. Его идея заключалась в том, что существует материальный переносчик электромагнитных взаимодействий — электромагнитное поле. При этом Фарадей категорически не любил формулы — физику он понимал на пальцах, замечая в проводимых им экспериментах взаимосвязи причин и явлений.

Фарадей прославился не только многочисленными открытиями. Он был блестящим популяризатором науки. С 1826 г. и почти до самой кончины он читал публичные научно-популярные лекции. Одна из них — «История свечи» [22] — стала самой известной научно-популярной лекцией в истории науки. Позже она была издана отдельной книгой и переведена на многие языки (в том числе и на русский).

Задача 7.1. Объясните принцип работы двигателя Фарадея.

Решение. Рассмотрим положение провода, которое показано на рисунке. Пусть по проводу идёт ток в направлении стрелки на проводе. Постоянный магнит создаёт магнитное поле, линии индукции которого в области провода расположены так, как показано на рисунке (направление стрелок на линиях индукции зависит от ориентации постоянного магнита; если его перевернуть, направление линий изменится на противоположное, изменится и направление силы). Тогда по закону Ампера на провод (в том положении, которое показано на рисунке) со стороны магнитного поля магнита будет действовать сила, направленная «на нас». Это приведёт к повороту провода, нижняя часть которого «выйдет» из плоскости чертежа «на нас» (а верхняя часть, привязанная к штативу, останется на месте). При этом повернётся и действующая сила, которая будет направлена перпендикулярно проводу, т. е. «на нас вправо». Провод и далее будет поворачиваться, будет поворачиваться и сила. В результате в каждый момент времени сила будет стремиться повернуть провод вокруг магнита.

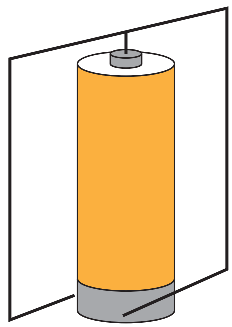


Двигатель Фарадея можно собрать и в домашних условиях. Во-первых, можно буквально повторить опыт Фарадея, заменив ртуть раствором поваренной соли в воде. Можно исследовать зависимость скорости вращения провода от различных параметров.

Можно обойтись и без жидкого проводника, а сделать модель двигателя на скользящих контактах. В Интернете можно найти огромное количество роликов или картинок с униполярным двигателем Фарадея. Попробуйте собрать его по приведённому ниже рисунку и объясните, как он работает.

Задача 7.2. Соберите двигатель Фарадея с жидким проводником, заменив ртуть раствором электролита (поваренной соли). В качестве источника тока используйте батарейку АА с напряжением 1,5 В. Исследуйте зависимость скорости вращения проволоки от концентрации раствора соли.

Из батарейки АА на 1,5 В, неодимового магнита цилиндрической формы (на рисунке расположен ниже батарейки) и медной проволоки, согнутой так, как показано на рисунке, сделайте модель униполярного двигателя.



Уже в 1822 г. англичанин **Питер Барлоу** придумал другую конструкцию униполярного двигателя — колесо Барлоу (см. задачу 7.4). Потом многие замечательные инженеры — англичанин Уильям Стерджен, венгр Аньош Йедлик, американцы Джозеф Генри и Томас Дэвенпорт, француз Ипполит Пикси и др. — придумывали свои модели двигателей. А в 1833 г. в Галерее практической науки в Лондоне Уильям Стерджен публично показал электродвигатель, который реально можно было использовать. И хотя именно этот двигатель считается первым электродвигателем в истории, уже в следующем году академик Санкт-Петербургской Академии наук Борис Семёнович **Якоби** представил работающий электродвигатель с непосредственным вращением рабочего вала, мощностью около 15 Вт и частотой оборотов вала 100—120 оборотов в минуту. А в 1839 г. Якоби собирает электродвигатель, питающийся от 320 медно-цинковых гальванических элементов и развивающий мощность около 3/4 л. с. (600 Вт). Двигатель размещался в лодке, которая перевозила через Неву (да ещё и против течения) 14 пассажиров. Одна из петербургских газет писала в 1839 г.: «...катер с двенадцатью человеками, движимый электромеханической силой (в 3/4 лошади), ходил несколько часов против течения, при сильном противном ветре... Что бы ни было впоследствии, важный шаг уже сделан, и России принадлежит слава первого применения теории к практике» [23]. Эти эксперименты Якоби стали настолько известны, что восторженное приветствие в адрес Якоби прислал Майкл Фарадей. Была создана комиссия во главе с адмиралом Иваном Фёдоровичем Крузенштерном и академиком Эмилием Христиановичем Ленцем для определения перспектив применения электродвигателей на море. Потом электродвигатели стали крутить токарные станки, двигали и переносили грузы, и было ясно, что за ними будущее. Но распространение электродвигателей упиралось в очень высокую стоимость электроэнергии, получаемой с помощью гальванических элементов.

7.3. Закон электромагнитной индукции

Пусть в магнитном поле находится замкнутый проводник (замкнутый виток металлического провода — проводящий контур). Опыт показывает:

при изменении индукции магнитного поля, конфигурации самого контура или его ориентации по отношению к магнитному полю в нём возникает электродвижущая сила (ЭДС), что приводит к появлению электрического тока в контуре. Это явление называется **электромагнитной индукцией** (ЭМИ). Её открытие предоставило людям способ превращения механической энергии движения контура в магнитном поле в энергию электрического тока.

Для количественной формулировки **закона электромагнитной индукции** введём величину, которая называется потоком магнитной индукции:

$$\Phi = B\Delta S\cos\alpha, \tag{7.2}$$

где B — индукция магнитного поля в точках поверхности, ΔS — площадь поверхности, α — угол между вектором $\vec{B}$ и нормалью (перпендикуляром) к поверхности, ограниченной контуром (рис. 7.6).

Закон электромагнитной индукции Фарадея утверждает, что при изменении магнитного потока через какой-либо замкнутый проводник в нём возникает ЭДС

$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \qquad (7.3)$$

ЭДС (7.3) называют **ЭДС индукции.**

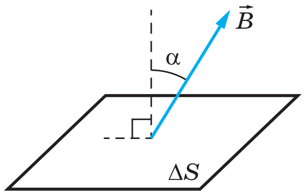


Рис. 7.6

С законом (7.3) можно связать определённое правило знаков, т. е. если и поток, и ЭДС считать алгебраическими величинами, то тогда в формуле (7.3) должен быть знак «минус». В этом случае закон (7.3) автоматически даёт направление ЭДС (направление индукционного тока). Можно, однако, считать все величины в законе (7.3) положительными, а направление индукционного тока определять независимо от закона (7.3) из правила Ленца.

Эмилий Христианович Ленц (1804—1865) — знаменитый русский физик и географ, профессор Петербургского университета, а впоследствии его ректор. Работы Ленца посвящены физике и физической географии (интересное сочетание!). Он, в частности, исследовал связь температуры и солёности морей, участвовал в восхождении на Эльбрус, доказал, что уровень Каспийского моря на 30 м ниже уровня Мирового океана, исследовал изменения магнитного поля Земли.

Основные физические работы Ленца посвящены физике электромагнетизма. Он установил правило, которое определяет направление индукционного тока (правило Ленца), в 1842 г. независимо от Джоуля открыл закон теплового действия электрического тока (закон Джоуля—Ленца).

Не менее значимой была педагогическая деятельность Ленца. Он создал одну из первых научных школ в России. Среди его учеников — Д. И. Менделеев, К. А. Тимирязев, П. П. Семёнов-Тян-Шанский и многие другие учёные. Большое внимание Ленц уделял вопросам преподавания физики в школе. Он написал замечательный учебник физики для гимназий, который выдержал более десяти переизданий.

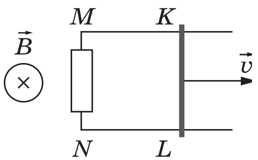
Правило Ленца: индукционный ток направлен так, что поток созданного им магнитного поля компенсирует те изменения внешнего магнитного потока, которые вызвали появление ЭДС индукции.

Например, если поток внешнего магнитного поля через контур увеличивается, то согласно (7.3) в контуре возникает индукционный ток, который направлен так, что индукция магнитного поля, созданного этим током в области контура, направлена противоположно индукции внешнего поля, чтобы компенсировать изменение вызвавшего ЭДС изменения поля. При этом компенсация будет полной только при нулевом электрическом сопротивлении контура (т. е. если образующие его провода являются сверхпроводниками), в случае ненулевого сопротивления эта компенсация будет частичной.

Магнитный поток через контур можно изменять, меняя значение магнитной индукции $\vec{B}$ или площадь контура (деформируя его) или поворачивая контур в магнитном поле (т. е. изменяя угол между поверхностью контура и вектором $\vec{B}$), — каждая из этих причин может внести свой вклад в генерируемую электродвижущую силу. Механизмы возникновения ЭДС индукции в этих случаях разные. При изменении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле, работа которого при перемещении зарядов по замкнутому контуру равна нулю. При деформации контура в магнитном поле участки проводника пересекают линии индукции и сила Лоренца, действующая на движущиеся заряды проводника, разделяет положительные и отрицательные, являясь причиной возникновения ЭДС.

Открытие закона (7.3) дало людям дешёвый способ получения электричества в промышленных масштабах. На электростанциях стоят огромные магниты, в поле которых вращаются проводящие контуры и вырабатывается электрический ток. Такие машины, которые называются **электрическими генераторами**, представляют собой преобразователи механической энергии вращательного движения в энергию электрического тока. Механическую работу по вращению контуров в магнитном поле может совершать падающая вода (на гидроэлектростанциях), ветер (ветровые генераторы) или выходящий из котла под давлением горячий пар, разогреваемый энергией сжигаемого топлива — углеводородного (на тепловых электростанциях) или ядерного (на станциях атомных). Именно на станциях перечисленных выше типов вырабатывается бо́льшая часть потребляемой человечеством электрической энергии.

Рассмотрим пример использования закона электромагнитной индукции.



Задача 7.2. По параллельным горизонтальным проводникам MK и NL, расстояние между которыми равно l, движется с постоянной скоростью $\vec{v}$ перемычка KL (см. рисунок; вид сверху). Система находится в однородном магнитном поле. Вектор $\vec{B}$ индукции магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости рисунка «от нас» (на рисунках это показывают кружком с крестиком, как стрелу, видимую со стороны оперения). Определите силу тока через резистор. Сопротивление перемычки и проводников MK и NL не учитывайте. Как направлен индукционный ток?

Решение. Поскольку перемычка движется, меняется площадь контура $MKLN$. Поэтому магнитный поток через этот контур изменяется с течением времени, и в нём возникает ЭДС индукции. Найдём её.

Пусть в некоторый момент времени площадь контура $MKLN$ равна S. Тогда магнитный поток через контур равен

$$\Phi_0 = BS. \qquad (*)$$

Спустя интервал времени Δt перемычка перемещается на расстояние $v\Delta t$, и, следовательно, площадь контура становится равной $S + lv\Delta t$, а магнитный поток через контур будет:

$$\Phi_1 = B\left(S + lv\Delta t\right). \qquad (**)$$

Из формул (*) и (**) находим изменение магнитного потока через рассматриваемый контур за время Δt:

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = Blv\Delta t,$$

а затем по закону электромагнитной индукции (7.3) находим ЭДС индукции в контуре $MKLN$:

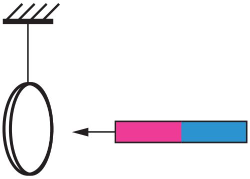
$$\mathscr{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv. \qquad (***)$$

Поскольку полное сопротивление контура $MKLN$ равно R, то по закону Ома для замкнутой цепи из выражения (***) получим силу тока:

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = \frac{Blv}{R}.$$

Чтобы определить направление индукционного тока, воспользуемся правилом Ленца. Вектор индукции внешнего магнитного поля направлен вниз, и поток этого поля через контур $MKLN$ увеличивается с течением времени. Следовательно, индукционный ток должен быть направлен так, чтобы созданное им магнитное поле было направлено вертикально вверх (т. е. «на нас»). Поэтому из правила определения направления поля провода заключаем, что ток в контуре будет направлен против часовой стрелки. Если изменить направление поля или скорости перемычки на противоположное, то изменится и направление индукционного тока. А если одновременно изменить и направление поля, и направление скорости перемычки, то индукционный ток снова будет направлен против часовой стрелки. Предлагаем читателю аккуратно рассмотреть все эти случаи на основании правила Ленца.

В некоторых ситуациях приходится рассматривать взаимодействие индукционного тока с тем магнитным полем, изменение которого его вызвало. Здесь также приходится использовать правило Ленца, которое фактически говорит о том, что индукционные явления связаны со «стремлением природы» сохранить существующий статус-кво. Это даёт универсальный способ определения их направлений. Разберём ещё один пример.



Задача 7.3. Постоянный магнит подносят к замкнутому алюминиевому кольцу, висящему на тонком длинном подвесе (см. рисунок). Будет ли магнит взаимодействовать с кольцом? Если да, то это будет притяжение или отталкивание?

Решение. Алюминий — немагнитный металл, поэтому покоящийся магнит не будет взаимодействовать с кольцом. Однако когда магнит приближается или удаляется от кольца, изменяется его магнитное поле в области кольца, изменяется поток магнитного поля через кольцо, в кольце возникает индукционный ток. А вот ток с постоянным магнитом взаимодействует. Следовательно, при движении магнита возникнет взаимодействие между ним и кольцом.

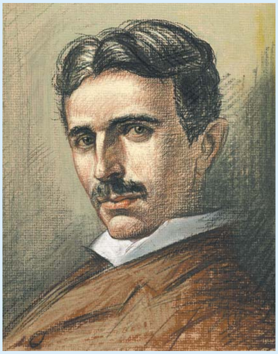
Согласно правилу Ленца индукционный ток направлен так, чтобы компенсировать вызывающую его причину. А поскольку эта причина — изменение поля вследствие приближения магнита к кольцу, то направление тока в кольце будет таким, что кольцо будет отталкиваться от магнита. После того как магнит сблизится с кольцом, а потом начнёт удаляться от него, по тому же правилу Ленца возникнет уже притяжение кольца к магниту.

Интересно, что электрические двигатели и электрические генераторы устроены практически одинаково. Только причина и следствие меняются местами: если подать ток на катушку, она станет вращаться в поле магнита, и мы получим двигатель. Если двигать катушку в поле магнита, в ней возникнет электрический ток. Впервые обратимость электромагнитной индукции была продемонстрирована Ленцем, который в 1834 г. опубликовал статью о законе взаимности магнитоэлектрических явлений, т. е. о взаимозаменяемости электрического двигателя и генератора.

7.4. Электродвигатели переменного тока

Переменный ток по многим параметрам интереснее постоянного. Во-первых, при вращении контура в магнитном поле в самом контуре индуцируется переменное (синусоидальное) напряжение и требуются специальные усилия, чтобы превратить его в постоянное (например, Фарадей использовал для этого специальное подключение контура, которое он назвал коммутатором). Во-вторых, при передаче напряжения на большие расстояния возникают потери энергии в проводах, и эти потери могут быть очень большими. Но оказывается, что при увеличении напряжения в электрической цепи потери энергии уменьшаются. Когда были изобретены **трансформаторы** — устройства, позволяющие изменять напряжение в цепи, возникла следующая идея передачи электричества: с помощью трансформатора увеличить напряжение в передающей цепи (причём, чем больше, тем лучше), передать электроэнергию с минимальными потерями, а затем понизить напряжение до бытовых значений и направить потребителям. Проблема была только в том, что трансформатор в принципе не работает в цепях постоянного тока. Поэтому разумнее оказалось не выпрямлять ток, полученный на электростанциях, а использовать его именно переменным. Независимо от полярности источника, от того, в каком направлении идёт ток через лампочку, — она всё равно будет греться и светится. А вот двигатель!.. Униполярный двигатель Фарадея работать не будет, поскольку в течение первой половины периода магнитное поле будет толкать провод в одну сторону, в течение второй — в другую.

Отсутствие двигателя было серьёзным фактором, сдерживающим применение переменного тока. И этой проблемой независимо друг от друга занялись два выдающихся инженера — серб Никола Тесла и итальянец Галилео Феррарис. Их идея заключалась в том, чтобы с помощью переменного тока создать вращающееся магнитное поле, которое заставит вращаться постоянный магнит. Но как создать магнитное поле, вектор индукции которого вращался бы?

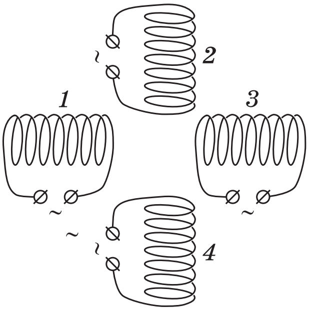


Никола Тесла (1856—1943) — выдающийся инженер-электротехник сербского происхождения. Именно после работ Теслы переменный ток вошёл в жизнь человечества. Тесла был сторонником двухфазной системы переменного тока, и одна из первых гидроэлектростанций в США на Ниагарском водопаде (построенная по проекту Теслы) давала двухфазный ток. Одновременно с Г. Феррарисом и независимо от него придумал метод получения вращающегося магнитного поля, на основе которого разработал электродвигатель переменного тока. Создал высокочастотные трансформаторы и электромеханические генераторы. С помощью этих приборов Тесла создавал молнии и пытался передавать на расстояние огромную энергию. Первым в Америке заинтересовался радиосвязью и внёс определённый вклад в её развитие.

В обычной жизни был, мягко говоря, странным человеком. Он панически боялся микробов, постоянно мыл руки, в отелях требовал до 20 полотенец в день. Останавливался в отеле только в том случае, если номер его апартаментов был кратен трём. Подсчитывал шаги при ходьбе, объёмы тарелок с супом, чашек кофе и кусков пищи. Поэтому обедал всегда в одиночестве, чтобы никто не отвлекал его от удивительно интересного занятия — подсчитывания числа проглоченных кусков пищи. Гуляя, громко декламировал «Фауста» Гёте; мог внезапно сделать резкий прыжок, пугая прохожих. Ненавидел женские серьги, особенно с жемчугом. Но конечно, не это было главным в Тесле, а результаты его работы, которые дали человечеству возможность использовать переменный ток.

Идея Теслы состояла в том, что переменный ток создаёт переменное магнитное поле, т. е. поле, индукция которого меняется по тригонометрическому закону, и, следовательно, комбинируя поля нескольких проводов (или катушек), можно создать вращающееся магнитное поле.

Было много проб и ошибок, а решение оказалось исключительно простым.



Задача 7.4. Для создания вращающегося магнитного поля Тесла и Феррарис брали несколько соленоидов, пропускали через них переменные токи одинаковой частоты, но со сдвигом фазы. Рассмотрите систему четырёх соленоидов, показанную на рисунке. Пусть в первом соленоиде сила тока изменяется по закону $I_1 = A\cos\omega t$. Какой ток нужно пропускать через остальные соленоиды, чтобы в области между ними было вращающееся магнитное поле? С какой угловой скоростью оно будет вращаться? Соленоиды намотаны так, что при одинаковых фазах тока поле всех соленоидов направлено одновременно либо из центра, либо к центру системы соленоидов.

Решение. Вектор индукции результирующего магнитного поля будет векторной суммой индукций, созданных каждым соленоидом. Поскольку соленоид создаёт магнитное поле, направленное вдоль своей оси, то поле соленоидов *1* и *3* (см. рисунок) будет направлено горизонтально, а поле соленоидов *2* и *4* — вертикально.

Далее будем рассуждать от результата. Если вектор результирующего поля вращается с постоянной угловой скоростью Ω, то его проекция на направление соленоидов *1* и *3* будет описываться соотношением

$$B_{1-3} = B\cos\Omega t, \qquad (*)$$

а на направление соленоидов *2* и *4* —

$$B_{2-4} = B\sin\Omega t, \qquad (**)$$

где B — модуль индукции результирующего поля. Отсюда заключаем, что ток в соленоиде *3* должен быть сдвинут по фазе на угол π по сравнению с током в соленоиде *1*. В этом случае поле соленоидов *1* и *3* будет зависеть от времени, как $B_{1-3} = 2B_0\cos\omega t$, где B_0 — поле одного соленоида. Чтобы поле соленоидов *2* и *4* имело вид (**), ток в соленоиде *2* должен быть сдвинут по фазе на угол $\pi/2$ по сравнению с током в соленоиде *1*, а ток в соленоиде *4* — на угол $3\pi/2$ по сравнению с током в соленоиде *1*. Тогда вектор индукции магнитного поля в области между соленоидами будет вращаться по часовой стрелке с угловой скоростью $\Omega = \omega$.

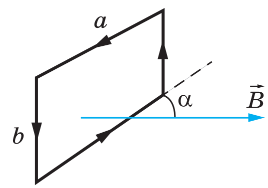
В настоящее время существует два варианта конструкции электродвигателей переменного тока — **синхронные** и **асинхронные** двигатели. В синхронных двигателях вращающееся магнитное поле вращает постоянный магнит, который вращается с той же угловой скоростью, что и поле (синхронно). В асинхронных двигателях в качестве вращающейся части (ротора) используются проводящие рамки, ток в которых создаётся самим вращающимся полем благодаря явлению электромагнитной индукции, а затем с этим полем и взаимодействует. Для создания вращающимся полем тока в роторе нужно, чтобы линии магнитной индукции пересекали рамки, которые, следовательно, вращаются значительно медленнее вращающегося поля (асинхронно).

С появлением электродвигателей переменного тока и разработкой технологии создания линий электропередачи высокого напряжения постоянный ток начал вытесняться током переменным. Его стали применять во всех областях человеческой деятельности, использовать в лифтах, станках, подъёмных кранах, а затем и в трамваях и троллейбусах.

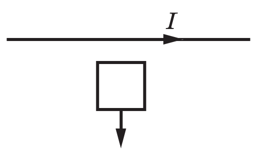
И уже в начале XX в., когда электродвигателям переменного тока не исполнилось ещё и 15 лет, массовость их применения была значительной, и в быту, и в промышленности, и на транспорте. Создание сетей электростанций в начале XX в. ускорило распространение электродвигателей, которые активно использовались в прикладной механике.

Задачи для самостоятельного решения

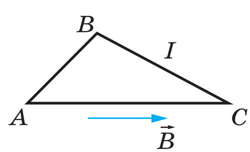
7.1. Прямоугольная рамка с током находится в однородном магнитном поле (см. рисунок). Как будет двигаться рамка? Определите момент сил, действующих на рамку, если сила тока в рамке I, индукция магнитного поля B, угол между плоскостью рамки и вектором магнитной индукции α. Что изменится, если направление магнитного поля изменить на противоположное?



7.2. Рядом с прямым проводником, сила тока в котором равна I, расположена квадратная проводящая рамка. В некоторый момент времени рамку начинают перемещать, удаляя от проводника. Возникнет ли в рамке индукционный ток, и если да, то каким будет его направление?



7.3. Треугольный контур с током ABC помещён в однородное магнитное поле, индукция которого параллельна стороне AC. При прохождении по контуру тока на сторону AB со стороны магнитного поля действует известная сила F_{AB}. Определите силы, действующие на стороны BC и AC.



ГЛАВА 8

ЖИДКОСТИ, ПОМОГАЮЩИЕ ЛЮДЯМ

Гидравлические механизмы и системы

8.1. Гидравлика — прикладная механика жидкости

В качестве главной составляющей многих современных механических устройств — компрессоров, амортизаторов, гидравлических прессов и гидравлических приводов — выступают жидкости, поскольку с их помощью можно передать по трубкам большую силу или большое давление. Перемещение больших объёмов жидкостей на большие расстояния — важнейшая задача, которую человечеству с давних пор приходилось решать при конструировании водопроводных или канализационных систем, и приходится решать сейчас при постройке нефтепроводов, газопроводов и т. д. Эти вопросы помогает решать гидравлика.

Гидравлика — техническая наука об использовании законов движения или равновесия жидкостей для решения тех или иных инженерных задач. Сами законы движения и равновесия жидкостей изучаются в **гидромеханике**.

Рассмотрим основные положения гидравлики и некоторые практически важные приложения этой науки.

8.2. Вспоминаем физику

Главное отличие жидкостей от твёрдых тел заключается в том, что жидкости могут течь. Это свойство жидкостей связано с их молекулярной структурой: в твёрдых телах молекулы находятся в узлах кристаллической решётки и не могут сильно смещаться относительно друг друга, что позволяет твёрдым телам «держать форму». Молекулы жидкости могут смещаться друг относительно друга, что и приводит к текучести жидкости.

Благодаря текучести жидкость в поле силы тяжести оказывает воздействие не только на дно сосуда, в котором она находится, но и на его стенки. Действительно, если убрать боковые стенки сосуда, в котором находится жидкость, она растечётся, а, значит, её необходимо «удерживать». Твёрдое тело из-за притяжения к Земле оказывает воздействие только на опору, поскольку оно само «держит форму». В положении покоя воздействие жидкости на стенку сосуда может быть только перпендикулярным этой стенке.

Для описания воздействия жидкости на стенки сосудов вводят понятие **давления жидкости**. Эта величина определяется как отношение силы F, действующей со стороны жидкости на малый элемент стенки площадью S, к площади этого элемента:

$$p = \frac{F}{S}. \tag{8.1}$$

Найдём давление жидкости в поле силы тяжести Земли. Для этого рассмотрим жидкость в сосуде цилиндрической формы площадью сечения S. Пусть h — высота столба жидкости в сосуде. Условие равновесия этой жидкости имеет вид

$$N = mg = \rho ghS, \tag{8.2}$$

где N — сила, действующая на жидкость со стороны дна сосуда, m — масса жидкости, ρ — её плотность, g — ускорение силы тяжести. По третьему закону Ньютона со стороны жидкости на дно действует такая же сила. В результате получаем

давление жидкости на глубине h

$$p = \frac{N}{S} = \rho gh, \tag{8.3}$$

которое принято называть **гидростатическим**. Гидростатическое давление жидкости не зависит от формы сосуда и определяется только глубиной и плотностью жидкости.

Кроме того, благодаря возможности течения, сила, действующая со стороны жидкости на малый элемент стенки, не зависит от его ориентации, и, следовательно, гидростатическое давление не зависит от направления. По этой причине давление не является вектором, хотя оно и определялось через векторную величину — силу; неправильно говорить «давление жидкости на стенку», так как давление осуществляется в каждой точке жидкости, правильнее говорить «давление жидкости в такой-то точке, на такой-то глубине». Утверждение о независимости давления от направления было установлено в 1653 г. и называется законом Паскаля.

Благодаря тому, что жидкость оказывает воздействие во всех направлениях, существует эффект выталкивания тел из жидкостей в поле силы тяжести. Если погрузить тело в жидкость, то согласно закону Паскаля жидкость будет оказывать воздействие на всю поверхность этого тела — и сверху, и сбоку, и снизу. Но из-за зависимости гидростатического давления от глубины воздействие жидкости на нижнюю часть тела будет больше, чем на верхнюю ($F_{нижн} > F_{верхн}$, рис. 8.1). Поэтому равнодействующая всех сил, действую-

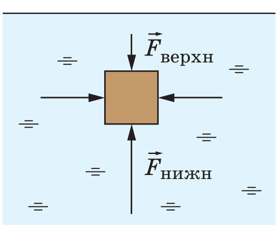
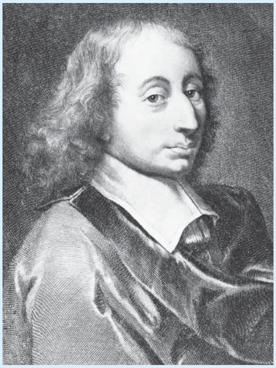


Рис. 8.1

щих на тело, направлена вверх, т. е. жидкость выталкивает тело. Эта сила называется **силой Архимеда**:

$$F = \rho g V, \tag{8.4}$$

где V — объём тела. Если в жидкость погружена только часть тела, то в формулу для силы Архимеда (8.4) вместо объёма всего тела входит объём погружённой в жидкость части тела.



Блез Паскаль (1623—1662) — французский математик, физик, религиозный философ и писатель. Установил основной закон гидростатики (закон Паскаля). Сформулировал идею гидравлического пресса — двойного сосуда с водой, с помощью которого можно добиваться любого увеличения сил.

Подтвердил предположение Эванджелисты Торричелли о том, что причиной подъёма жидкости в трубке является давление атмосферы на свободную поверхность жидкости. Вместе с Флораном Перье в 1648 г. провёл эксперименты с трубкой Торричелли у основания горы Пюи-де-Дом в Клермон-Ферране и на её вершине (высота 1465 м). Разницу более трёх дюймов в уровнях ртути объяснил разностью атмосферного давления. Это был один из первых случаев в истории науки, когда результат эксперимента был с хорошей точностью предсказан заранее.

Его именем названа единица давления в международной системе единиц — паскаль (Па): 1 Па $= 1$ Н/м$^2 = 1$ кг/(м $\cdot$ с^2).

Одновременно с занятиями наукой Паскаль писал глубокие публицистические, философские и религиозные литературные произведения. Считается классиком французской литературы. Произведениями Паскаля восхищались Л. Н. Толстой и И. С. Тургенев.

Поскольку произведение ρV, входящее в формулу Архимеда, есть масса той жидкости, которая помещается в объёме тела (или, что то же самое, вытеснена телом), то выражение $\rho g V$ имеет смысл веса той жидкости, которую вытесняет собой тело. Именно через вес жидкости в объёме тела сформулировал свой **закон** Архимед.

Из формулы (8.4) можно получить **условие плавания тел**. Если погрузить тело полностью в жидкость и предоставить самому себе, то его дальнейшее поведение будет определяться соотношением сил Архимеда и тяжести. Если сила Архимеда будет больше силы тяжести, то тело всплывёт, если меньше — утонет. Выражая силу тяжести через плотность $\rho_т$ тела и его объём V и используя формулу (8.4) для силы Архимеда, получим условие плавания тела в жидкости:

$$\rho_т gV < \rho gV \quad \Rightarrow \quad \rho_т < \rho. \tag{8.5}$$

При выполнении условия (8.5) тело всплывёт и в жидкости останется какая-то часть его объёма. Такое положение тела и будет положением равновесия.

Рассмотрим приложения законов Паскаля и Архимеда в технике и их проявления в природе.

Работы Паскаля явились продолжением работ другого замечательного физика, прожившего такую же, как и Паскаль, короткую жизнь, — **Эванжделисты Торричелли (1608—1647).** Торричелли учился в Риме под руководством любимого ученика Галилея Бенедетто Кастелли, которому посвящено одно из программных сочинений Галилея «Письмо Кастелли». Позже Торричелли стал работать вместе с ним. В это время строители фонтанов во Флоренции обнаружили удивительное явление — вода в пустых трубах поднималась только до высоты 34 фута, оставляя над поверхностью абсолютную пустоту. А ведь Аристотель сказал, что природа боится пустоты. Когда строители обратились к Галилею, тот пошутил, что, наверное, природа перестаёт бояться пустоты при высоте столба выше 34 футов, но поручил Торричелли разобраться с этим вопросом. Торричелли предположил, что поскольку плотность ртути в 13 раз больше плотности воды, то, заменив воду ртутью, можно получить подъём жидкости примерно на 75 см и эксперимент можно перенести со стройплощадки в лабораторию. Проведя серию экспериментов, Торричелли понял, что ртуть в трубке (или воду в трубах) держит давление воздуха на свободную поверхность ртути в сосуде. А отсюда следовало, что воздух имеет вес. Этот вывод был настолько новым и необычным, что ему поверили далеко не сразу. И был даже придуман термин «торричеллиева пустота». А вот после опытов Паскаля с измерением высоты поднятия ртути у подножия горы и на её вершине концепция давления атмосферы стала общепризнанной.

Торричелли стал также основоположником гидравлики, получив формулу для скорости вытекания воды через отверстие около дна того или иного сосуда. Занимался также механикой и математикой, научившись строить в треугольнике точку, сумма расстояний от которой до его вершин минимальна (точка Торричелли).

8.3. Закон Паскаля в технике и в жизни

Закон Паскаля позволяет создавать механические устройства, преобразующие силу или давление сильнее, чем рычаги, шестерни и блоки. Одним из таких устройств является

гидравлический пресс — машина для обработки материалов давлением, приводимая в действие сдавливаемой жидкостью.

Гидравлический пресс представляет собой конструкцию из двух соединённых между собой прочных цилиндров разных сечений, в которые налита несжимаемая жидкость (в современных прессах используется, как правило, минеральное масло). Цилиндры закрыты герметичными поршнями.

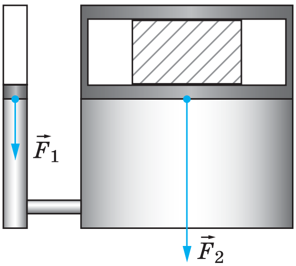


Рис. 8.2

Подействуем на поршень в узком сосуде силой F_1, на поршень большого сосуда положим и зажмём между ним и прочной станиной тело, которое мы хотим сжать (рис. 8.2). Найдём силы, действующие на поршни в положении равновесия (когда жидкость не перетекает из одного сосуда в другой). В равновесии поршень в узком сосуде действует на поверхность жидкости с силой, равной сумме силы F_1, силы тяжести поршня и силы, которую создаёт атмосферное давление воздуха, равное p_aS_1, где p_a — атмосферное давление, S_1 — площадь сечения узкого сосуда. Эти силы обеспечивают давление жидкости под узким поршнем, равное (в пренебрежении массой поршня)

$$p = \frac{F_1}{S_1} + p_a.$$

По закону Паскаля точно такое же давление будет под поверхностью большого поршня. Поэтому

$$\frac{F_1}{S_1} + p_a = \frac{F_2}{S_2} + p_a,$$

где F_2 — сила, с которой большое тело действует на поршень. Согласно третьему закону Ньютона с такой же силой большой поршень действует на тело, прижимая его к станине. Таким образом,

действуя на поршень в узком сосуде силой F_1, мы получим силу, с которой большой поршень действует на тело:

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1,$$

т. е. получим **выигрыш в силе**, равный отношению площадей сечений сосудов.

В современных домкратах это отношение имеет значение 100—1000, что обеспечивает грузоподъёмность домкратов до нескольких тонн. Но существуют и суперпрессы, дающие увеличение силы в сотни тысяч раз. Именно такой является гидроавтоматика реактивных самолётов, горных комбайнов, шагающих экскаваторов. А в научных экспериментах по исследованию веществ при огромных давлениях используются прессы, обеспечивающие избыточное давление до миллиона килопаскалей. При этом рычаг с гигантским отношением длин плеч (как в задаче об Архимеде, сдвигающем Землю) здесь не требуется. Так что если бы Архимед сказал: «Дайте мне гидравлический пресс, и я сдвину Землю», — это было бы больше похоже на правду.

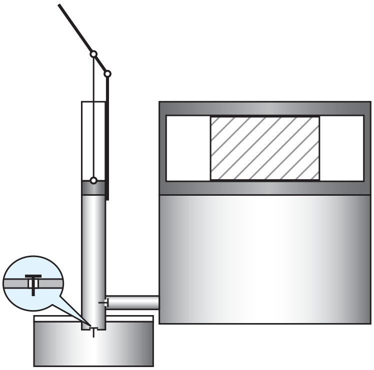
Известен так называемый **опыт Паскаля** — опыт с бочкой, который несколько раз показывал Паскаль, демонстрируя действие закона, который мы сейчас называем законом Паскаля. Причём обставлялся этот опыт несколько театрально...

По просьбе Паскаля крепкую дубовую бочку с металлическими обручами наполняли до краёв водой и наглухо закрывали крышкой. Затем в крышке делали маленькое отверстие, в которое плотно вставляли тонкую трубку длиной около 5 м. Затем Паскаль поднимался на балкон соседнего дома, около которого заканчивалась трубка, и вливал в неё кружку воды. Поскольку трубка была тонкая, давление увеличивалось в несколько раз, и прочную дубовую бочку с металлическими обручами разрывало. Свидетели утверждают, что наблюдавшая за экспериментом публика была в восторге. Продолжая подобные опыты, Паскаль убедился, что увеличение давления зависело только от высоты трубки, а не от количества вливаемой в неё воды. Это и привело к открытию закона Паскаля и **гидростатического парадокса**, когда небольшое по массе количество жидкости может создавать огромное давление.

Серьёзным недостатком гидравлического пресса (в том виде, как он показан на рисунке 8.2) является малый ход большого поршня при большом ходе малого. Действительно, для заметных перемещений большого поршня нужно перегнать в большой цилиндр много жидкости, при том что в узком цилиндре её совсем мало. Поэтому узкий сосуд нужно делать очень длинным, и мы снова сталкиваемся с той же проблемой длинного плеча, как и для рычага. Тем не менее удалось найти очень остроумное решение этой проблемы.

Рассмотрим следующий пример.

Задача 8.1. На рисунке показана конструкция современного гидравлического пресса с дополнительным резервуаром для жидкости (на рисунке этот резервуар показан под узким цилиндром). Посмотрите на рисунок и объясните принцип работы такого пресса. Клапаны (один из

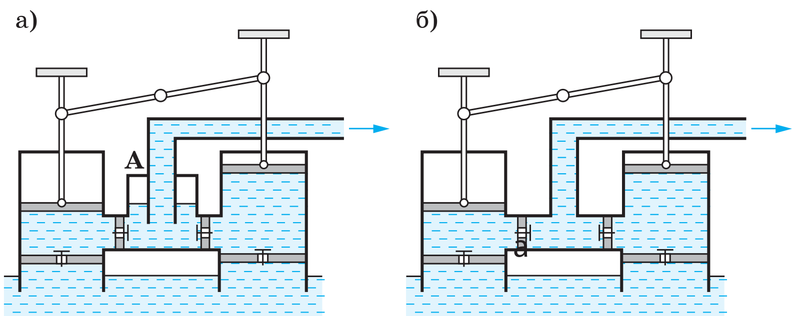


них показан на рисунке крупной врезкой) пропускают жидкость в одну сторону, если её давление с одной стороны больше давления с другой, и не пропускают в другую независимо от соотношения давлений жидкости в отсеках сосуда.

Решение. Основная идея работы пресса с дополнительным резервуаром заключается в том, что поршень в узком сосуде оснащается ручкой, соединённой с поршнем с помощью длинного штока, и движение поршня осуществляется возвратными (вверх-вниз) накачивающими движениями. При движении поршня вниз закрывается клапан в дне узкого сосуда, но открывается клапан в соединительной трубке. Порция жидкости проходит в большой сосуд. При движении поршня вверх клапан в трубке закрывается, не выпуская жидкость из большого сосуда, но открывается в дне узкого сосуда, засасывая в него жидкость из резервуара. Таким образом, за каждый ход поршня из резервуара в систему поступает жидкость. Следовательно, узкий сосуд не надо делать длинным, чтобы добиться большого хода поршня в широком сосуде.

Одинаковость давления в разных точках жидкости позволяет делать гидравлические **насосы**, которые могут накачивать воду. Основная идея насоса состоит в том, чтобы создать в какой-то области давление, меньшее атмосферного, — область разрежения, тогда атмосферное давление будет перемещать в эту область жидкость. Рассмотрим пример.

Задача 8.2. На рисунке приведены схемы двух пожарных насосов, которые ставятся на воду и при «качельном» движении поршней в цилиндрах обеспечивают движение воды. Объясните, как работают насосы. Левый насос отличается от правого наличием камеры А, в которой есть небольшое количество воздуха. Какова функция этой камеры? В чём проявляется разница в работе насосов? Клапаны пропускают воду только в одном направлении.



Решение. При движении левого поршня вниз, а правого вверх увеличивается давление в левой камере насоса и уменьшается в правой. Поэтому нижний левый клапан закрывается, левый боковой открывается, пропуская воду из левой камеры в центральную. В это же время правый боковой клапан закрывается, не пропуская воду из центральной камеры в правую. Правый нижний клапан в это время открывается, и благодаря уменьшению давления в правой камере вода засасывается из водоёма в правую камеру. Затем процесс повторяется.

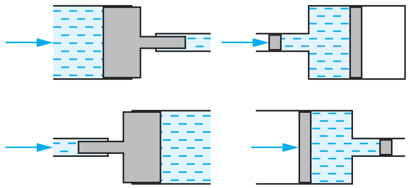
Разница между насосами заключается в следующем. Правый насос даёт напор воды только при движении поршней. Около «мёртвой точки» их движения поршни не давят на воду, вода не течёт, т. е. правый насос работает прерывисто. В левом насосе за счёт сжатия воздуха в камере А создано повышенное давление. В результате левый насос обеспечивает непрерывное откачивание воды даже около точек «мёртвого хода» поршней.

Ещё одна сфера использования закона Паскаля в технике — это **гидравлический привод**. Вот как используется здесь равенство давлений во всех точках жидкости. Например, при торможении автомобиля водитель нажимает на педаль тормоза в салоне. Но это усилие нужно передать тормозным колодкам, чтобы прижать их к тормозному диску или тормозному барабану. С помощью системы рычагов это сделать сложно, поскольку положение колёс по отношению к автомобилю изменяется из-за работы амортизаторов и поворота осей поворотных колёс. Поэтому тормозная система в автомобиле представляет собой систему герметичных трубопроводов, заполненных так называемой тормозной жидкостью. При нажатии на педаль тормоза в тормозной системе увеличивается давление тормозной жидкости (во всех точках одновременно — по закону Паскаля). С тормозными колодками связаны поршни, которые могут перемещаться в цилиндрических отсеках (тормозных цилиндрах) при увеличении давления в тормозной системе. Фактически гидравлический привод выполняет ту же функцию, что и механическая передача, но может занимать любое положение в пространстве и менять его в процессе работы.

В настоящее время гидравлический привод используется в строительно-дорожных машинах, погрузчиках, подъёмных кранах. Используется гидравлический привод и в станкостроении, и особенно активно в авиации. Общая длина гидроприводов в одном пассажирском самолёте может достигать нескольких километров (!).

В автомобилях используются также **гидравлический тормоз** и **гидроусилитель руля**. Гидроусилители применяют и во многих других областях техники: авиации, тракторостроении, промышленном оборудовании и др.

Конечно, при работе гидравлического привода нам необходимы такие узлы, которые позволили бы увеличивать давление или действующие силы в гидравлической системе. В связи с этим давайте рассмотрим такую задачу.



Задача 8.3. В гидравлических приводах используют узлы, схематически показанные на рисунках: на левых верхнем и нижнем рисунках поршень переменного сечения разделяет две жидкости, на правых верхнем и нижнем жидкость в трубе переменного сечения занимает пространство между двумя поршнями разной площади. Одно из приведённых устройств можно назвать мультипликатором давления, другое — мультипликатором силы (мультипликатор — увеличитель, или умножитель). Определите, как можно назвать каждое из устройств. Объясните почему. В каких приспособлениях и как можно использовать мультипликаторы давления и силы? Рассчитайте увеличение силы (давления), если радиус входной тонкой трубы равен r, а толстой — $10r$.

Решение. В левом верхнем узле (см. рисунок) условие равновесия поршня переменного сечения даёт равенство

$$p_1 S_1 = p_2 S_2,$$

где p_1 и p_2 — давления жидкости в правом и левом отсеках, S_1 и S_2 — площади сечения правого и левого отсеков. Отсюда находим

$$p_2 = \frac{S_1}{S_2} p_1 \quad \Rightarrow \quad p_2 > p_1, \text{ если } S_1 > S_2.$$

Таким образом, левый верхний узел представляет собой мультипликатор давления. Используется в системах, где с помощью жидкости передаётся давление и нужно его увеличивать (например, в тормозной системе автомобиля). Если отношение радиусов труб равно 10, то увеличение давления равно 100. По этим же причинам левый нижний узел следует назвать редуктором (уменьшителем) давления.

Правые устройства являются мультипликатором и редуктором силы. Поскольку давление жидкости около правого и левого поршней одинаково, то

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2},$$

где F_1 и F_2 — силы, действующие со стороны воды на правый и левый поршни (и со стороны поршней на воду), S_1 и S_2 — площади сечения правого и левого отсеков. Отсюда находим

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \quad \Rightarrow \quad F_2 > F_1, \text{ если } S_2 > S_1.$$

Поэтому правый верхний узел следует назвать мультипликатором силы. Такого рода конструкции используются в гидравлических домкратах. Если отношение радиусов труб равно 10, то увеличение силы равно 100. По этим же причинам правое нижнее устройство следует назвать редуктором (уменьшителем) силы.

8.4. Закон Архимеда в технике и в жизни

Приложения закона Архимеда к работе тех или иных устройств не столь многочисленны, как приложения закона Паскаля, но не менее (а может быть, и более) важны. Большинство их связано с **плаванием тел**. И главное, где используется закон Архимеда, — это флот: лодки, яхты, корабли. Причём при создании корабля нужно не просто убедиться, что выталкивающая сила будет больше силы тяжести корабля и корабль будет плавать, но и исследовать его конструкцию на устойчивость при качке (в теории кораблестроения используют термин «остойчивость»). В истории судостроения были случаи, когда пренебрежение законами физики приводило к трагедиям: суда, испытав небольшое отклонение от вертикального положения (крен), переворачивались. В настоящее время при строительстве кораблей проводят и оценки, и расчёты, и натурные эксперименты с моделями кораблей для оценки их устойчивости.

В технике используют также многообразные **поплавковые уровнемеры** — устройства, позволяющие определить положение уровня жидкости в закрытом сосуде (например, бензина в бензобаке автомобиля). Принцип работы таких устройств прост. С поплавком, находящимся на поверхности жидкости, связывают систему рычагов (или нить), которая и показывает положение уровня жидкости (рис. 8.3).

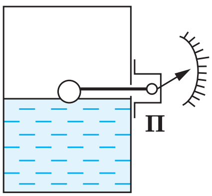


Рис. 8.3

Учитывают закон Архимеда и в нефтедобыче, закачивая в нефтяную скважину воду. Будучи тяжелее нефти, вода опускается в нижнюю часть нефтяного пласта и выталкивает нефть на поверхность. При бурении глубоких скважин в скважину заливают жидкость, уменьшая огромный вес длинных буровых колонн.

Огромную роль в технике играют приборы для измерения плотности жидкости, основанные на принципе плавания тел, — ареометры. **Ареометр** представляет собой запаянную стеклянную трубочку с утяжелителем, которая может вертикально плавать в жидкости. Поскольку глубина погружения ареометра в жидкость зависит от плотности жидкости, то по глубине погружения ареометра в жидкость можно определить её плотность. Шкалу ареометра можно проградуировать в единицах плотности жидкости, а можно — в единицах концентрации или в процентах алкоголя (спиртометр) или соли в растворе (солемер).

Задача 8.4. Как изменяется глубина погружения солемера или спиртометра в соответствующий раствор при увеличении концентрации?

Решение. Глубина погружения солемера уменьшается, а спиртометра увеличивается. Действительно, при увеличении концентрации солевого раствора увеличивается количество соли в нём без изменения его объёма, т. е. увеличивается плотность раствора, поэтому уменьшается глубина погружения ареометра. А вот для спирта ситуация обратная. Спирт представляет собой жидкость с плотностью, меньшей плотности воды. Поэтому при смешении спирта и воды получается жидкость с плотностью, промежуточной между плотностью воды и спирта. И при увеличении концентрации спирта плотность раствора уменьшается. Поэтому в более крепкий раствор спирта ареометр погружается глубже.

Метрологические возможности закона Архимеда связаны с измерением плотности тел. Известна **легенда** о том, как Архимед сумел определить, сделана ли новая корона царя Гиерона из золота, или жулик-ювелир подмешал туда серебро. Гиерон обратился за помощью к своему научному консультанту — Архимеду. Тот так увлёкся задачей, что постоянно думал о ней, думал, даже находясь в ванне. Погрузившись в наполненную ванну и заметив, что вес его тела изменился, Архимед понял, что тело выталкивается из жидкости, и сообразил, как, взвесив корону в воздухе и в воде, можно измерить плотность материала короны. По легенде, Архимед выскочил голый на улицу с криком «Эврика!» («Нашёл!»). Так был открыт основной закон гидростатики — закон Архимеда. При этом среди современных школьников и учителей бытует совершенно неправильное мнение о том, как это сделал Архимед. Якобы он понял, что при погружении в ванну его тело вытеснило объём воды, равный объёму его тела; собрал эту воду и измерил её объём, узнав тем самым свой объём. Потом взвесился, измерив свою массу. А потом вычислил свою плотность. Это не так! Во времена Архимеда не было способов измерения массы и объёма, и даже единиц их измерения не было. Измерялось всегда одно через другое. Другими словами, Архимед должен был измерить плотность короны в единицах плотности воды, а затем проделать то же для золота и серебра, чтобы понять, какой сплав использовал ювелир.

Удивительно, но и во времена Галилея большинство людей думало так же, как некоторые современные школьники. И Галилей в работе, посвящённой закону Архимеда [24], резко критиковал эти соображения. Почти так же, как мы в предыдущем абзаце (или, точнее, мы в предыдущем абзаце, как Галилей).

Чтобы понять, что и как измерял Архимед, рассмотрим две задачи.

Задача 8.5. Определите процентное содержание золота в короне, если вес короны в воздухе в $N = 1{,}069$ раз меньше, чем в воде. Известно, что вес чистого золота в воде в $N_з = 1{,}055$ раз меньше, чем в воздухе, а вес чистого серебра в воде в $N_с = 1{,}105$ раз меньше, чем в воздухе.

Решение. Пусть M — масса короны, $m_з$ — масса золота в ней, $m_с$ — масса серебра ($M = m_з + m_с$). По определению, содержанием золота и серебра в короне называются следующие величины:

$$n_з = \frac{m_з}{M}, \qquad n_с = \frac{m_с}{M}.$$

Связь плотности сплава ρ с содержанием в нём золота и серебра находится из следующей цепочки очевидных формул:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{V}{M} = \frac{\dfrac{m_з}{\rho_з} + \dfrac{m_с}{\rho_с}}{M} = \frac{m_з}{M\rho_з} + \frac{m_с}{M\rho_с} = \frac{n_з}{\rho_з} + \frac{n_с}{\rho_с},$$

где V — объём короны, $\rho_з$ и $\rho_с$ — плотности золота и серебра.

Установим теперь, как изменяется вес тела в воде. Поскольку на тело в воде действует сила Архимеда, равная весу воды в объёме тела, отношение веса тела в воздухе к его весу в воде равно

$$N = \frac{\rho g V}{\rho g V - \rho_0 g V} = \frac{\rho}{\rho - \rho_0}, \text{ или } \frac{1}{N} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho},$$

где ρ_0 — плотность воды.

Последнюю формулу запишем для короны:

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} = 1 - n_з\frac{\rho_0}{\rho_з} + n_с\frac{\rho_0}{\rho_с} = 1 - n_з\left(\frac{N_з - 1}{N_з}\right) - n_с\left(\frac{N_с - 1}{N_с}\right).$$

Таким образом, для уменьшения веса всего сплава получаем следующую формулу:

$$n_з\left(\frac{N_з - 1}{N_з}\right) + n_с\left(\frac{N_с - 1}{N_с}\right) = \frac{N - 1}{N}.$$

Отсюда получаем окончательно

$$n_з = \frac{\dfrac{N-1}{N} - \dfrac{N_с - 1}{N_с}}{\dfrac{N_з - 1}{N_з} - \dfrac{N_с - 1}{N_с}} = 0{,}71.$$

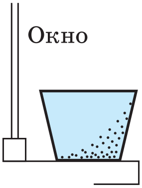
Обратите внимание, что нуль в знаменателе получается при одинаковых плотностях компонентов сплава, но в этом случае в нуль обращается и числитель формулы, а из данных по весам определить соотношение плотностей золота и серебра в короне нельзя.

Задача 8.6. Пусть при взвешивании некоторого тела в воздухе удлинение пружины динамометра составило (92 ± 2) мм, а при взвешивании в воде — (57 ± 2) мм. Определите отношение плотности тела к плотности жидкости. Оцените погрешность измерения отношения плотностей. Считая, что жидкость — вода, определите, из какого вещества изготовлено тело.

Ответ. Отношение плотности тела к плотности жидкости $\rho / \rho_0 = 2{,}7 \pm 0{,}3$. Это алюминий.

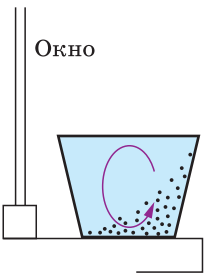
Явления, связанные с законом Архимеда и условиями плавания тел, играют огромную роль в **формировании климата и экосистем** на Земле. Во-первых, благодаря необычной температурной зависимости расширения—сжатия воды лёд при температурах, близких к температуре замерзания, плавает в воде.

Если бы эта зависимость была такой, как у всех остальных веществ, холодная вода опускалась бы вниз и водоёмы замерзали бы зимой со дна, а не с поверхности, что сделало бы невозможным существование жизни в воде в тех широтах, где вода замерзает. Во-вторых, формирование тёплых и холодных морских течений зависит в частности от взаимодействия лёгкой (пресной) и тяжёлой (солёной) морской воды. Тяжёлая вода, попадая в область более лёгкой пресной воды (около мест впадания в моря крупных рек или таяния льдов), тонет, освобождая область вблизи поверхности и создавая тягу. Именно так тонет солёная вода Карибского моря, попадая с Гольфстримом в воды, омывающие Гренландию, и поддерживает его течение. А Гольфстрим — это обогреватель Европы, создающий уникально тёплый европейский климат. Так же взаимодействие тяжёлых и лёгких водяных и воздушных масс приводит к перемешиванию (конвекции) в слоях воды и в слоях воздуха, оказывая влияние на климат на Земле. Работает конвекция и в малых масштабах — в стаканах, кастрюлях, чайниках при их неравномерном нагреве. Давайте рассмотрим задачу, в которой конвекция происходит в стакане с водой.



Задача 8.7. В стакане с водой комнатной температуры находится взвесь маленьких песчинок, которые тонут очень медленно из-за сопротивления воды. Песчинки тщательно размешали, а стакан поставили на подоконник около окна. Через некоторое время песчинки в стакане расположились так, как показано на рисунке. Какая за окном погода?

Решение. Переместить взвесь песчинок из одного места стакана в другое можно только с помощью движения воды. Наиболее заметное движение воды происходит из-за конвекции — опускания тяжёлых холодных масс воды и поднятия тёплых. Это значит, что температура на улице отличается от температуры в комнате, поэтому улица может нагревать или охлаждать воду в стакане, вызывая конвекцию.



Очевидно, что заданное в условии задачи расположение песчинок возникнет, если организовать конвективные потоки в направлении стрелки на рисунке. А для этого нужно, чтобы слои воды, близкие к окну, охлаждались. Тогда нижние слои должны двигаться в направлении комнаты, а те более тёплые слои, которые были там, должны подниматься вверх. В результате песчинки, опускаясь вниз, будут смещаться током воды в направлении комнаты. Это означает, что на улице холодно.

8.5. Водопровод и канализация

До сих пор мы говорили о покоящихся жидкостях, выполняющих определённые функции в технических устройствах. Но человечество нуждается в жидкостях не только как средстве, но и как цели. Нам нужно приводить чистую воду в места массового поселения людей и уводить оттуда грязную, т. е. нам нужны **водопровод** и **канализация**.

Систематическое строительство водопроводов началось в древнем Риме, где был разработан главный **принцип функционирования водопровода** — вода должна течь самотёком, но не слишком быстро. Это означает, что место, откуда течёт вода, должно быть немного выше того места, куда она течёт.

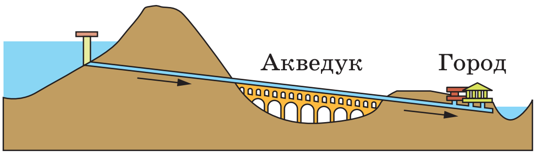


Рис. 8.4

Путь воды на любом участке должен быть направлен вниз. Но реально на местности так не бывает, рельеф обычно неровный. Даже если начало пути воды выше его конца, уровень поверхности может то опускаться, то подниматься... Следовательно, необходимо строить мосты для воды — через низины! Эти мосты римляне назвали **акведуки** (дословный перевод «вести воду»). Типичная схема римского водопровода показана на рисунке 8.4. Иногда по акведуку прокладывали трубы, но чаще делалась открытая кювета-канал. Очень важно было выдерживать постоянный уклон, причём небольшой. Римляне делали уклон примерно десять сантиметров на километр или чуть больше. Вода должна была течь медленно. В противном случае пришлось бы предпринимать специальные усилия, чтобы удерживать воду в открытом неглубоком канале. Римские акведуки в длину достигали десятков километров. Многие из сохранившихся акведуков поражают красотой и совершенством формы (рис. 8.5).

Рис. 8.5

К сожалению, в Средние века технические достижения римлян в Европе были забыты. Вплоть до Нового времени европейцы использовали воду из рек, текущих через города, или делали колодцы. Возрождение водопроводостроения началось в Европе только в XVIII—XIX вв. В Москве, например, во второй половине XVIII века по распоряжению императрицы Екатерины II была построена мытищинская водопроводная система, включавшая акведук не хуже римских. Его и сегодня можно увидеть на северо-востоке Москвы.

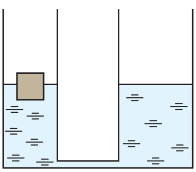
Весьма занятна история ещё одной гидротехнической системы человечества — канализационной. Одной из первых канализационных систем стала построенная в Древнем Риме Клоака Максима — закрытый канал, отводивший стоки от Форума в Тибр. Потом были и другие каналы, причём римляне выкладывали их камнем. Сооружение таких каналов было государственным делом, которым руководил специально назначенный сенатор. В Средние века в Европе все достижения Рима были забыты, и крупные европейские города были завалены нечистотами. В Лондоне, например, тотальная антисанитария, вызванная отсутстствием канализации, царила вплоть до второй половины XIX в.!

При создании канализационных систем крупных городов пришлось решить ряд серьёзных технических проблем. В XIX в. обсуждались два подхода — французский и английский. Велись серьёзные споры между специалистами, в которые были вовлечены не только инженеры, но и биологи, врачи и даже агрономы. Во французском проекте (в его разработке принимал участие известный микробиолог Луи Пастер) предполагалось использовать герметичные металлические трубы, которые с помощью мощных насосов будут уносить нечистоты подальше от города, в особое место, где будут находиться заводы по переработке стоков. Или сбрасывать подальше в море... Очевидно, что это был не самый практичный проект: трубы ржавеют, насосы ломаются, система дорогá и недолговечна.

Практичные англичане пошли по другому пути. Решили просто убрать канализацию под землю, не делая её герметичной. Тогда дорогие и недолговечные металлические трубы не нужны — трубы можно делать из камня и бетона, укрепляя цементом. Их можно сделать большими и отделить от «чистого мира» системами типа сифонов, канализационных люков, колодцев. При этом сточные воды могут двигаться по канализационной системе самотёком, без всяких насосов, как предлагалось во французском проекте.

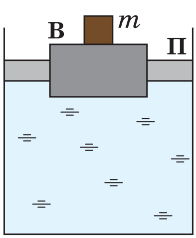
Задачи для самостоятельного решения

8.1. Корабль выплывает из пресноводной реки Волги в солёное Каспийское море. Как изменяется сила Архимеда, действующая на корабль?



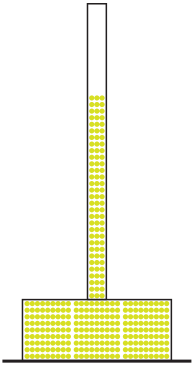
8.2. В сообщающиеся цилиндрические сосуды радиусами R_1 и R_2 залита вода (см. рисунок). На сколько изменится уровень воды в сосудах, если в один из них положить деревянный брусочек массой m? Плотность воды ρ. Зависит ли ответ от того, в какой из сосудов положить брусочек?

8.3. К поплавку массой $m = 10$ г привязана леска с грузом. При этом поплавок погружён в воду на k-ю часть своего объёма ($k = 2/3$). Определите силу натяжения лески, если свободно плавающий поплавок погружён в воду на n-ю часть объёма ($n = 1/2$). Примите $g = 10$ м/с^2.

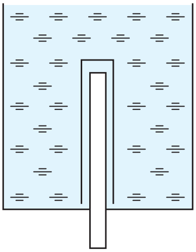


8.4. В сосуде на поверхности воды находятся в равновесии подвижные поршень П и втулка В, вставленная в отверстие в поршне (см. рисунок). Трение между скользящими поверхностями отсутствует, зазоры жидкость не пропускают. На поверхность втулки положили груз массой m. На сколько сместится втулка относительно первоначального положения? Плотность жидкости ρ, площадь сечения сосуда S, площадь сечения втулки S_1.

8.5. При изготовлении оливкового масла массу раздробленных с косточками оливок отжимают под прессом. При этом получается коллоидный раствор масла в воде — взвесь маленьких капель масла (с размерами порядка 1 мкм и меньше) в воде. Затем отделяют масло, наливая раствор в сосуды с узким горлышком (см. рисунок) и собирая масло после отстаивания раствора. Изменяется ли в процессе такого отстаивания раствора его давление около дна сосуда, и если да, то во сколько раз? Считайте, что первоначальный раствор содержит воду и масло равных объёмов V, сосуд состоит из двух соединённых цилиндров объёмом $4V/3$ и $4V/3$, радиусы которых относятся как 1:10. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3, $\rho_0 = 900$ кг/м^3. При отстаивании коллоидного раствора его объём не меняется.



8.6. (Двойной сифон Герона.) Сделайте двойной сифон Герона Александрийского (см. рисунок). Для этого в дне пластикового стакана или кружки просверлите отверстие, вставьте в отверстие трубочку (для напитков), герметизируйте стык (хотя бы пластилином). На трубочку в стакане наденьте вторую трубочку диаметром чуть больше первой и закрытую сверху (типа короткой пробирки). Контакт между второй трубочкой и дном должен быть неплотным, чтобы при наливании жидкости в стакан она подтекала под край верхней трубочки. В стакан до краёв быстро налейте воду так, чтобы за время наливания она не успела вылиться через трубочку. Что будет происходить потом? Объясните эффект.



ГЛАВА 9

ВРАЩЕНИЕ

Колёса и двигатели

9.1. Вращение — цель и средство прикладной механики

Уже несколько раз в этой книге мы говорили о вращательном движении. Именно вращательное движение создают двигатели, как электрические, так и тепловые. Это связано с тем, что основным элементом, перемещающим те или иные устройства в пространстве, — их движителем — является вращающееся колесо. В основе работы бытовой и промышленной техники — станков, кухонных машин, прокатных станов, пылесосов, дрелей и др. — лежит вращение, которое люди используют для выполнения нужных им действий. Поэтому изучение вращательного движения является одной из важнейших целей прикладной механики.

9.2. Вспоминаем физику

Быстрота вращения точечного тела характеризуется **угловой скоростью** ω, которая определяется как отношение угла поворота тела $\Delta\varphi$ к тому интервалу времени Δt, за которое этот поворот произошёл:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \qquad (9.1)$$

При этом (если это не оговорено особо) в качестве единиц измерения углов используются естественные единицы — **радианы**.

Важное свойство угловой скорости заключается в том, что эту величину можно ввести для протяжённого твёрдого тела в целом — в отличие от линейной скорости, которая, вообще говоря, при вращении разная у разных точек такого тела. А вот угловая скорость — одинаковая. Действительно при вращении протяжённого твёрдого тела разные его точки за одни и те же интервалы времени проходят разные расстояния и потому имеют разные линейные скорости, но поворачиваются на одинаковые углы и потому имеют одинаковые угловые скорости. По этой причине можно говорить об угловой скорости всего твёрдого тела, а не каких-то его точек.

Из определения угловой скорости можно получить очевидное соотношение между угловой скоростью и **периодом движения**. Применяя определение (9.1) к повороту на полный угол (2π радиан), получаем

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad (9.2)$$

где T — время полного оборота, или период движения (конечно, формула (9.2) справедлива для движения с постоянной угловой скоростью).

Из соотношения (9.2) следует, что для тел, вращающихся с известным периодом, угловая скорость фактически известна. Например, угловые скорости секундной, минутной и часовой стрелок часов равны соответственно

$$\omega_с = \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-1}\ (с^{-1}),\ \omega_м = \frac{2\pi}{60 \cdot 60} = \frac{\pi}{1,8} 10^{-3}\ (с^{-1}),$$

$$\omega_ч = \frac{2\pi}{12 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{\pi}{2,16} \cdot 10^{-4}\ (с^{-1}). \tag{9.3}$$

Заметим также, что угловые скорости стрелок любых часов одинаковы: например, минутные стрелки наручных часов и часов Спасской башни Московского Кремля совершают полный оборот за 1 ч и, следовательно, имеют одинаковые угловые скорости.

Установим связь между угловой и обычной (линейной) скоростями точки вращающегося тела. Пусть точка движется по окружности радиусом R и за малый интервал времени Δt поворачивается на угол $\Delta\varphi$. Тогда её перемещение Δr приближённо равно длине дуги, опирающейся на этот угол: $\Delta r = R\Delta\varphi$ (это выражение справедливо для угла, выраженного в радианах). Отсюда линейная скорость

$$v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{9.4}$$

Сравнивая выражение (9.4) с определением угловой скорости (9.1), заключаем, что

$$v = \omega R. \tag{9.5}$$

Рассмотрим теперь вопрос об ускорении точки при движении по окружности. Даже в случае движения с постоянной по модулю скоростью ускорение точки не равно нулю, поскольку в каждый следующий момент времени изменяется направление скорости. Поэтому

движение по окружности с постоянной по модулю скоростью не является равномерным. Такое движение имеет особое название — **равномерное движение по окружности**.

Вектор мгновенного ускорения точки при равномерном движении со скоростью v по окружности радиусом R направлен в каждой точке от неё к центру окружности, а его значение равно

$$a = \frac{v^2}{R},\ \text{или}\ a = \omega^2 R. \tag{9.6}$$

Поскольку вектор ускорения точки при её равномерном движении по окружности направлен к центру этой окружности, ускорение (9.6) принято называть **центростремительным**.

Христиан Гюйгенс (1629—1695) — великий голландский физик, математик и астроном. Первым исследовал вращательное и колебательное движение тел, исправил ошибку Галилея, считавшего, что движение тела по окружности происходит без ускорения, вывел формулу для центростремительного ускорения и периода колебаний математического маятника. Создал первую волновую теорию света, сформулировал основной принцип распространения волн (принцип Гюйгенса—Френеля). Независимо от Ферма и Паскаля заложил основы теории вероятностей. Открыл кольца Сатурна и его самый крупный спутник — Титан.

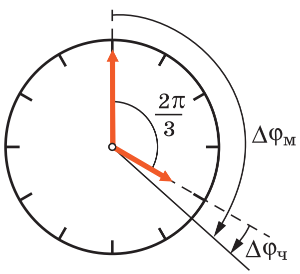
Главным достижением Гюйгенса стало изобретение маятниковых часов, дававших поразительную для того времени точность — несколько секунд в сутки, в то время как другие часы «уходили» на десятки минут. Центральным элементом конструкции этих часов был изобретённый Гюйгенсом анкерный механизм, который периодически подталкивал маятник и поддерживал его незатухающие колебания. Точные и недорогие часы Гюйгенса распространились по всему миру.

Несмотря на глубокое понимание природы, Гюйгенс совершенно не принял закон всемирного тяготения, назвав его в письме к Лейбницу «смешным и нелепым», поскольку тело «не может действовать там, где его нет».

Научный авторитет Гюйгенса был столь высок, что он, голландец, стал первым президентом Французской академии наук, которую возглавлял в течение 15 лет. Был первым иностранным членом Лондонского королевского общества, находясь в самом центре научной жизни конца XVII в.

9.3. Кинематика вращательного движения

С угловой скоростью можно работать так же, как и с линейной скоростью; но если линейная скорость позволяет находить пройденные телом расстояния, то угловая — углы поворота точки (или тела) за любые интервалы времени. Рассмотрим следующий пример.



Задача 9.1. На часах 16 ч. Через какое минимальное время после этого часовая и минутная стрелки встретятся?

Решение. При решении задачи о прямолинейном движении тел друг за другом обычно рассуждают так. Вводят неизвестное время встречи тел, а затем по формуле, связывающей расстояние, время и скорость, находят пути, пройденные каждым телом до момента встречи. Разность этих путей равна первоначальному расстоянию между телами.

Используем эти же рассуждения для случая угловых перемещений.

Итак, пусть стрелки встретятся через время t после 16 ч. Тогда минутная стрелка повернётся за это время на угол $\Delta\varphi_м = \omega_м t$, часовая — на угол $\Delta\varphi_ч = \omega_ч t$ (напомним, что угловые скорости $\omega_м$ и $\omega_ч$ нам известны, поскольку известны периоды вращения стрелок). Очевидно, разность углов поворота до встречи равна первоначальному углу между стрелками, который в начальный момент времени (в 16 ч) равен третьей части полного угла, т. е. $2\pi/3$ (см. рисунок; место стрелок часов показано сплошным отрезком). Поэтому

$$\omega_м t - \omega_ч t = \frac{2\pi}{3}. \qquad (*)$$

Решая уравнение (*), находим

$$t = \frac{2\pi}{3(\omega_м - \omega_ч)}. \qquad (**)$$

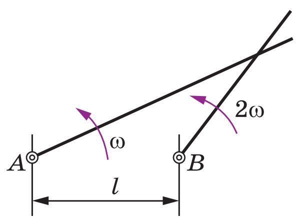
Подставляя в уравнение (**) угловые скорости стрелок из (9.3) (в обратных минутах), получим

$$t = \frac{1}{\frac{3}{60}\left(1 - \frac{1}{12}\right)} = \frac{240}{11} = 21{,}8 \text{ (мин)}.$$

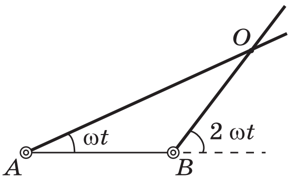
Можно рассмотреть и более «хитрые» задачи на кинематику вращательного движения, но во всех них главное — правильное использование определений угловой скорости и центростремительного ускорения.

Рассмотрим пример движения общей точки двух звеньев плоского механизма, образованного несвязанными стержнями.

Задача 9.2. Два длинных стержня вращаются с постоянными угловыми скоростями ω и 2ω вокруг параллельных осей, проходящих через их концы A и B (см. рисунок). Расстояние между осями l, в начальный момент оба стержня направлены направо. По какой траектории движется точка пересечения стержней? Определите скорость и ускорение этой точки через время $t = \pi / 6\omega$ после начала движения.



Решение. Пусть после начала движения (когда стержни были направлены вправо) прошло некоторое время t, которое меньше времени половины оборота правого стержня: $t < \pi / 2\omega$. Рассмотрим треугольник ABO, где A и B — концы стержней, вокруг которых они вращаются, O — точка пересечения стержней в этот момент (см. рисунок). Очевидно, треугольник ABO равнобедренный, в котором $AB = BO$. Действительно, поскольку угол OBC равен $2\omega t$, то угол ABO в треугольнике



ABO равен $\pi - 2\omega t$. А поскольку угол OAB равен ωt, то угол AOB равен

$$\angle AOB = \pi - \angle OAB - \angle ABO = \pi - \omega t - (\pi - 2\omega t) = \omega t.$$

Таким образом, в треугольнике OAB $\angle AOB = \angle OAB$, и, следовательно, этот треугольник равнобедренный, в нём $AB = BO$ в любой момент времени. Поэтому расстояние от точки B до точки пересечения стержней остаётся одинаковым в процессе движения и равным l. Следовательно, точка пересечения стержней движется с постоянной угловой скоростью 2ω по окружности с центром в точке B и радиусом l. Поэтому скорость этой точки не меняется в процессе движения:

$$v = 2\omega l, \tag{*}$$

а её ускорение является центростремительным и равным

$$a = 4\omega^2 l. \tag{**}$$

Рассмотренное решение становится неверным через время $t > \pi / 2\omega$, поскольку стержни перестают пересекаться. Однако через время, за которое правый стержень совершит ещё один оборот (через время $t > 3\pi / 2\omega$ после начала движения стержней), стержни снова начнут пересекаться, причём точка их пересечения будет находиться ниже отрезка AB. Рассуждения, аналогичные приведённым выше, показывают, что траекторией точки пересечения стержней будет нижняя половинка окружности, а её скорость и ускорение будут такими же. Затем (через время $t > 2\pi / \omega$ после начала движения стержней) оба стержня станут направлены вправо, а далее движение точки их пересечения повторится.

Таким образом, в течение половины времени, за которое правый стержень совершит два полных оборота (а левый — один), стержни будут пересекаться, в течение второй половины времени не будут. При этом точка их пересечения будет двигаться так: сначала — по верхней половине окружности с центром в точке B и радиусом l; потом стержни не будут пересекаться; потом — по нижней половине окружности с центром в точке B и радиусом l. Когда стержни пересекаются, скорость и ускорение точки их пересечения являются постоянными и определяются формулами (*) и (**). Когда стержни не пересекаются, вопрос о скорости и ускорении точки их пересечения является бессмысленным.

9.4. Катится колесо

Колесо, изобретённое в V—IV тыс. до н. э., стало универсальным приспособлением, позволяющим двигаться тележкам, экипажам, автомобилям... А вот вопрос о движении самого колеса является совсем не простым, поскольку разные его точки движутся по-разному — ведь движение колеса достаточно сложное: центр колеса движется вдоль поверхности земли, а все остальные точки колеса ещё и вращаются вокруг центра. Рассмотрим это движение.

Пусть по горизонтальной поверхности со скоростью $\vec{v}$ катится колесо (рис. 9.1). Определим скорости точек A, B, C и D. Основная идея заключается в том, что мы знаем скорости двух точек относительно земли — центра колеса и его нижней точки. Центр — единственная точка колеса, которая не вращается и имеет только скорость v относительно земли. Нижняя точка по условию не скользит по земле, и, следовательно, скорость этой точки относительно земли равна нулю (за исключением экзотических случаев трогания с пробуксовкой или заноса).

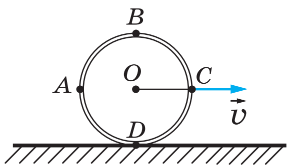


Рис. 9.1

Перейдём в систему отсчёта, связанную с центром колеса и, следовательно, движущуюся относительно земли со скоростью v. В этой системе отсчёта центр колеса покоится, земля движется назад со скоростью v, а движение колеса представляет собой вращение относительно центра (рис. 9.2). Поскольку нижняя точка колеса не проскальзывает относительно земли, то она движется вместе с землёй, т. е. имеет скорость v относительно центра. Значит, и все остальные точки на ободе имеют скорости, равные v по модулю и направленные перпендикулярно радиусам. Отсюда можно найти угловую скорость колеса $\omega = v/R$, где R — его радиус.

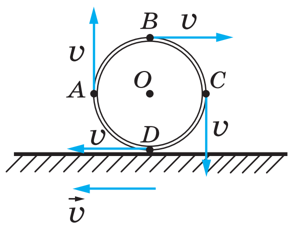


Рис. 9.2

Для определения скоростей точек на ободе колеса в системе отсчёта, связанной с землёй (рис. 9.3), воспользуемся законом сложения скоростей:

$$\vec{v}_{X-з} = \vec{v}_{X-O} + \vec{v}_{O-з},$$

где $\vec{v}_{X-з}$ — скорость некоторой точки X колеса относительно земли, $\vec{v}_{X-O}$ — скорость этой точки относительно центра O колеса, $\vec{v}_{O-з}$ — скорость центра колеса относительно земли (т. е. $\vec{v}$). Используя правило векторного сложения, найдём скорости разных точек колеса относительно земли (на рисунке 9.3 скорости соответствующих точек относительно земли показаны цветными стрелками). Из рисунка заключаем, что скорость верхней точки колеса равна $2v$, боковых — $\sqrt{2}v$, нижней — нулю.

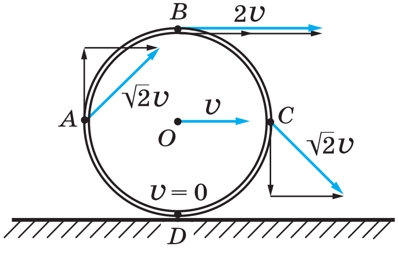
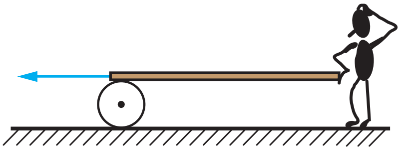


Рис. 9.3

То, что скорости точек, лежащих ниже центра колеса, меньше v, а лежащих выше центра колеса, больше v, можно увидеть и визуально. Посмотрите на колёса быстро проезжающего мимо вас велосипеда. Спицы, примыкающие к нижней точке колеса, можно различить. А вот спицы, находящиеся далеко от нижней точки, сливаются. То обстоятельство, что скорость верхней точки колеса оказывается вдвое большей скорости центра, тоже можно увидеть. Рассмотрим пример.



Задача 9.3. Человек стоит на расстоянии l от цилиндрического катка, удерживая за конец доску длиной l (см. рисунок). Доска горизонтальна. Человек начинает идти к катку, толкая вперёд доску, которая, в свою очередь, толкает вперёд каток так, что проскальзывание между доской и катком отсутствует. Какое расстояние пройдёт человек, прежде чем он подойдёт к катку? Проскальзывание между катком и полом также отсутствует.

Решение. С одной стороны, человек идёт к катку. И должен пройти расстояние до катка, равное l. С другой стороны, человек катит каток перед собой (т. е. каток движется от человека). А дойдёт ли вообще человек до катка? Чтобы ответить на все эти вопросы, давайте посмотрим на скорости разных тел (и точек). Пусть человек идёт со скоростью v. Тогда доска тоже движется со скоростью v. И следовательно, верхняя точка колеса (по которой доска по условию не проскальзывает) тоже движется со скоростью v. Но тогда из результатов рассмотрения движения колеса заключаем, что скорость центра катка равна $v/2$. Поэтому до того момента, как человек дойдёт до катка, каток пройдёт вдвое меньшее расстояние. Значит, чтобы дойти до катка, человеку нужно пройти расстояние $2l$.

Подобную ситуацию можно реализовать практически. Возьмите ручку цилиндрической формы, сделанную из нескользкой пластмассы. Положите ручку на лист бумаги. Возьмите деревянную линейку, положите её одним концом на ручку, держите горизонтально за другой конец. На листе бумаги отметьте положение ручки, положение руки, держащей линейку.

Теперь медленно двигайте линейку в направлении ручки, прижимая линейку к ручке, чтобы обеспечить непроскальзывание линейки по ручке и ручки по бумаге. Отметьте на листе бумаги место, где рука, держащая линейку, доберётся до ручки. Сравните расстояние, пройденное рукой, с первоначальным расстоянием между рукой и ручкой.

9.5. Мгновенный центр вращения

Если протяжённое тело вращается вокруг некоторой своей точки, то скорости всех точек тела перпендикулярны отрезкам, проведённым к ним из этого центра вращения (рис. 9.4), а их значения пропорциональны расстояниям от них до центра вращения. Из этого утверждения

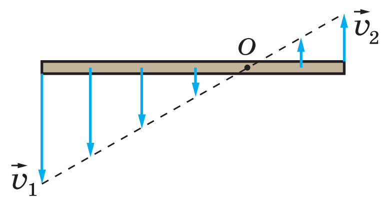


Рис. 9.4

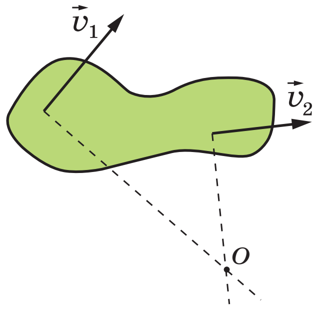
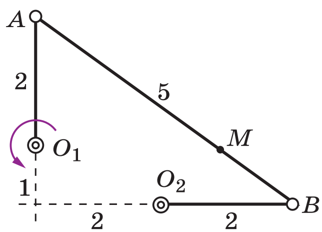


Рис. 9.5

следует, что концы векторов скоростей всех точек вращающегося стержня лежат на прямой, соединяющей концы векторов скоростей его концов (рис. 9.5).

Если движение тела представляет собой комбинацию вращательного и поступательного движений, в каждый момент времени можно ввести такую точку (не обязательно совпадающую с какой-то точкой тела), вокруг которой оно в данный момент вращается (мгновенный центр вращения). Эту точку можно найти, если известны скорости двух любых точек тела. Если провести перпендикуляры к векторам скоростей этих точек, то пересечение этих перпендикуляров даст положение мгновенного центра вращений и любая точка тела будет иметь скорость, перпендикулярную отрезку, проведённому к ней из мгновенного центра вращений, а значение скорости будет пропорционально расстоянию от мгновенного центра вращений.

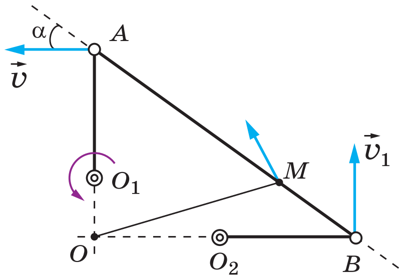
Если тело вращается относительно некоторой фиксированной оси, то мгновенный центр вращения совпадает с осью вращения тела. В противном случае мгновенный центр вращения протяжённого тела перемещается в пространстве, и в последующие моменты времени мгновенным центром вращения может быть какая-то другая точка. Например, для катящегося без проскальзывания колеса мгновенным центром вращения в каждый момент времени является точка его касания с землёй. Рассмотрим пример.



Задача 9.4. Трёхзвенный механизм представляет собой три связанных шарнирно стержня: O_1A, AB и BO_2, прикреплённые к неподвижным осям O_1 и O_2 (см. рисунок). Размеры механизма (в условных единицах) и его расположение в некоторый момент времени показаны на рисунке ($AB = 5$, угол между звеньями AO_1 и BO_2 прямой). Стержень O_1A вращается вокруг оси O_1 так, что скорость точки A постоянна и равна v (направление вращения стержня AO_1 показано стрелкой). Определите для этого момента скорость точки M, делящей стержень AB в отношении $3 : 1$ ($AM : MB = 3 : 1$).

Решение. С одной стороны, точка B принадлежит стержню O_2B, поэтому её скорость $\vec{v}_1$ направлена перпендикулярно этому стержню. С другой стороны, точка B принадлежит и стержню AB. Поэтому проекции скоростей точек A и B на стержень AB равны (это следует из условия неизменности размеров стержня AB):

$$v\cos\alpha = v_1\sin\alpha.$$



Отсюда с учётом того что $\operatorname{tg}\alpha = 3/4$, получаем

$$v_1 = \frac{4v}{3}.$$

Очевидно, точка пересечения продолжений стержней AO_1 и BO_2 (точка O на рисунке) является мгновенным центром вращения стержня AB, а его угловая скорость равна

$$\omega_{AB} = \frac{v}{OA} = \frac{v_1}{OB}. \qquad (*)$$

Поэтому для скорости точки M

$$v_M = \omega_{AB} \cdot OM.$$

Длину отрезка OM найдём из треугольника OMB по теореме косинусов. Учитывая, что $MB = 5/4$ и $\cos\alpha = 4/5$, получим

$$OM = \sqrt{OB^2 + MB^2 - 2OB \cdot MB\cos\alpha} = \frac{3\sqrt{17}}{4} \text{ (ед.)}.$$

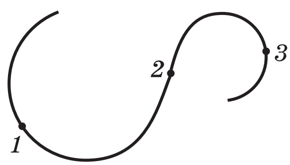
В результате из формулы (*) выражаем скорость точки M:

$$v_M = \frac{\sqrt{17}}{4}v.$$

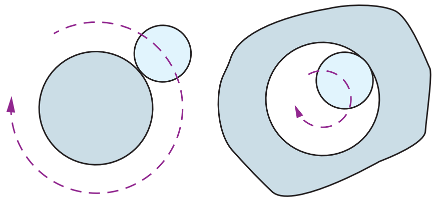
Задачи для самостоятельного решения

9.1. На равномерно вращающемся диске отмечены две точки: первая — на расстоянии 5 см от оси вращения, вторая — на расстоянии 15 см от оси вращения. Известно, что ускорение первой точки равно 3 м/с^2. Чему равно ускорение второй точки?

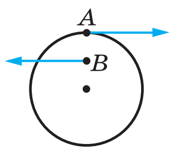
9.2. Автомобиль движется с постоянной скоростью по траектории, показанной на рисунке. В какой из указанных на рисунке точек его ускорение максимально? (Точка *2* находится на прямом участке траектории.)



9.3. Лентопротяжный механизм магнитофона (см. рисунок) обеспечивает постоянство скорости перемещения магнитной ленты относительно воспроизводящей головки независимо от количества ленты на катушке. Пусть лента перематывается со скоростью $v = 4{,}76$ см/с, толщина ленты $d = 27$ мкм. Какое время продолжалась перемотка, если начальный радиус приёмной катушки с лентой $r_1 = 22$ мм, конечный — $r_2 = 46$ мм? А какое время продолжалась бы перемотка ленты, если бы приёмная катушка вращалась с постоянной угловой скоростью, равной средней угловой скорости перемотки в первом режиме: $\omega = 2v / (r_1 + r_2)$?



9.4. Диск радиусом R обкатывает неподвижный диск радиусом $2R$ (т. е. движется по поверхности большого диска без проскальзывания; левый рисунок). Сколько оборотов вокруг своей оси совершит малый диск, когда его центр повернётся на угол $\Delta\varphi$ вокруг большого? Второй раз диск радиусом R движется без проскальзывания по внутренней поверхности полого цилиндра радиусом $2R$ (правый рисунок), также поворачиваясь на угол $\Delta\varphi$. Сколько оборотов вокруг своей оси совершит малый диск в этом случае?



9.5. На гладкой горизонтальной поверхности лежит диск. В некоторый момент времени на диск начинают действовать две силы, равные по модулю и противоположные по направлению и приложенные в точках A и B (на рисунке показан вид сверху). Как будет двигаться диск в первый момент времени?

ГЛАВА 10

КОЛЕБАНИЯ, ИЗМЕРЯЮЩИЕ ВРЕМЯ

Упругость, колебания, прочность

10.1. Упругость и деформации

Любое движущееся устройство (автомобиль, самолёт, двигатель), как и любая неподвижная механическая или строительная конструкция, как правило, состоит из множества деталей, опирающихся друг на друга и заставляющих друг друга двигаться. Возникающие при взаимодействии силы вызывают деформацию деталей — изменение их формы и размеров. В рабочем режиме, когда взаимодействия деталей механизма невелики, их деформации являются упругими, т. е. при прекращении действия вызывающей деформацию силы деформация исчезает, деталь восстанавливает исходную форму, а конструкция сохраняет работоспособность. Если воздействие превышает некоторый предел, деформация может стать необратимой, что приведёт к повреждению конструкции, а затем и к её разрушению.

Попробуйте, например, изготовить шестерни автомобиля из мягкого или хрупкого материала — они деформируются и/или разрушатся, сделав движение автомобиля невозможным. Или построить небоскрёб из деревянных конструкций — он рухнет недостроенный! Поэтому при проектировании любых механических объектов необходимо учитывать прочностные характеристики материалов, из которых они будут изготавливаться.

Явление упругости важно для нас и само по себе. Для измерения времени мы используем периодический процесс, например колебания пружины в механических часах. Кстати, в кварцевых часах тоже используются механические колебания: при приложении постоянного напряжения к кристаллу кварца он начинает вибрировать, создавая переменный ток нужной частоты — 1 колебание за 1 с, который и задаёт ритм часам.

Исследованием упругих и прочностных характеристик материалов занимается раздел прикладной механики, называемый **сопротивлением материалов**. Здесь мы приведём только самые общие сведения из этого раздела. Но начнём мы не с них, а с человека, который дал нам их понимание.

Роберт Гук (1635—1703) — выдающийся английский физик и инженер. Занимался многими разделами естествознания и инженерии. Сконструировал воздушный насос, барометр, вообще все метеорологические приборы, карданный шарнир, который и сегодня используется в автомобилестроении. Открыл закон пропорциональности между силой, приложенной к упругому телу, и его деформацией; теперь он называется законом Гука. По-видимому, первым предложил обратную квадратичную зависимость для гравитационного взаимодействия тел, но не смог доказать эллиптичность орбит планет на основе этой зависимости (это сделал И. Ньютон).

Предложил использовать в часах пружинный мятник, причём пружину предложил сделать в форме спирали, совершающей крутильные колебания. Другая спиральная пружина в часах Гука выполняла роль гири — «подпитывала» колебания энергией, делая их незатухающими. Эти идеи Гука используются и сегодня практически во всех механических часах.

С помощью микроскопа впервые наблюдал клеточную структуру тканей растений, ввёл термин «клетка». Высказывал мысли об изменениях земной поверхности и климата, которые влекли за собой изменения флоры и фауны Земли. Считал, что окаменелости — это остатки живших прежде существ, по которым можно воспроизвести естественную историю Земли. Гук зарисовывал то, что наблюдал в микроскоп, затем делал гравюры, которые становились типографскими формами для размножения его рисунков. Был, по-видимому, первым физиком, показавшим передний край науки обычным людям.

После Великого пожара 1666 г. восстанавливал Лондон. И как строитель (по его проектам был построен ряд зданий в Лондоне), и как руководитель комиссии по восстановлению Лондона создал концепцию сегодняшнего Лондона.

В силу особенностей характера, а также широкого круга интересов и обязанностей Гук часто не доводил свои работы до конца и утрачивал приоритет в своих открытиях. Поэтому всю жизнь вёл приоритетные споры со многими учёными (в частности, с Ньютоном относительно закона всемирного тяготения, с Бойлем относительно закона Бойля—Мариотта, с Гюйгенсом по поводу часов и др.). Время не пощадило память о Гуке: пропал архив учёного, лаборатория быстро прекратила существование после его смерти, не сохранилось ни одного прижизненного портрета Гука. (Р. Гук — единственный из членов Лондонского королевского общества, чей портрет не сохранился.)

10.2. Упругие силы. Модули упругости

При упругой деформации любого тела в нём возникают силы, которые стремятся вернуть его в первоначальное (недеформированное) состояние и которые называются **силами упругости**.

Сила упругости, возникающая при малых деформациях, пропорциональна деформации. Если растянуть (или сжать) пружину на некоторую длину Δx, то в пружине возникнет сила

$$F = k\Delta x, \tag{10.1}$$

где k — коэффициент пропорциональности, который зависит от материала пружины и её геометрии — сечения проволоки, шага, диаметра витков. Этот коэффициент называется **жёсткостью** (или коэффициентом жёсткости) пружины, а закон (10.1) — **законом Гука**.

Закон Гука выполняется для небольших деформаций, которые называются **упругими**. Если после такой деформации убрать внешнее воздействие, тело возвращается в первоначальное состояние. Если деформация тела превышает некоторый предел, то после снятия внешнего воздействия тело не возвращается в начальное состояние, а имеет **остаточную деформацию**. Такие деформации называются **пластическими**. Наличие остаточных деформаций свидетельствует о том, что во время пластической деформации происходят необратимые нарушения кристаллической структуры тел.

Иногда закон Гука (10.1) записывают со знаком «−». Такая форма записи возможна, но нужно точно понимать, что такое Δx и что такое F в формуле (10.1) — вектор, модуль, проекция, и если проекция, то на какую ось. Поэтому проще считать все величины в формуле (10.1) положительными, а направление силы упругости задавать словами.

Природа возникновения силы упругости заключается в том, что молекулы твёрдого тела занимают определённые позиции, а при их отклонении от этих позиций возникают силы взаимодействия с соседними молекулами, которые стремятся вернуть их в первоначальные положения. Эти силы и приводят к возникновению сил упругости при деформации. Другими словами, сила упругости возникает в пружине благодаря деформации каждого её элемента. Поэтому для анализа упругих сил, возникающих при деформации тел любой формы, необходимо сформулировать закон Гука для малых элементов, на которые можно мысленно разделить любые тела.

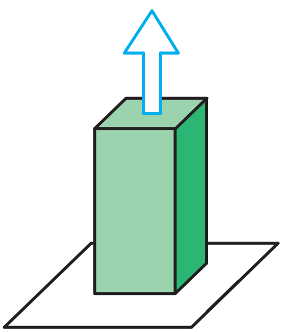


Рис. 10.1

Пусть имеется малый элемент твёрдого тела длиной l и площадью поперечного сечения S. Рассмотрим сначала растяжение—сжатие этого элемента. Приложим внешнюю силу $\vec{F}$ к верхнему основанию (рис. 10.1), направив вдоль самого элемента. При малой внешней силе растяжение элемента Δl должно быть пропорционально приложенной силе. С другой стороны, растяжение элемента должно быть обратно пропорционально его площади: $\Delta l \sim 1/S$. Действительно, при увеличении площади мы растягиваем как бы несколько подобных элементов и требуется бóльшая сила для растяжения до той же деформации. Кроме того, деформация прямо пропорциональна длине элемента, так как при деформации более длинного элемента на ту же длину каждый его участок деформируется меньше. Поэтому для деформации элемента имеем

$$\Delta l \sim \frac{Fl}{S},$$

а коэффициент пропорциональности не зависит ни от силы, ни от геометрии элемента, т. е. определяется только свойствами материала, но не геометрией элемента. Таким образом, закон Гука для растяжения малого элемента записывается так:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{ES}, \text{ или } \varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \tag{10.2}$$

где величина $\varepsilon = \Delta l / l$ называется **относительной деформацией** элемента, $\sigma = F / S$ — **напряжением**. Коэффициент пропорциональности E между относительной деформацией и напряжением зависит только от свойств материала и называется его **модулем Юнга**. Модуль Юнга материала является табличной величиной и измерен для всех мыслимых и немыслимых материалов. Измеряется модуль Юнга в тех же единицах, что и давление (напряжение), — в паскалях (кг/м^2). Характерные значения модуля Юнга для металлов — десятки гигапаскалей, для твёрдых и хрупких веществ (типа гранита) — сотни гигапаскалей.

Соотношение (10.2) можно применять и к протяжённым телам (а не только к малым элементам тел), если внешняя сила распределена равномерно по сечению тела. Рассмотрим пример.

Задача 10.1. Из двух металлов с модулями Юнга E_1 и E_2 изготовили два стержня с одинаковыми сечениями. Длина первого стержня (с модулем Юнга E_1) вчетверо больше длины второго стержня (с модулем Юнга E_2). Стержни сварили торцами, стык обработали, а затем покрасили так, что получившийся стержень выглядит как однородный. Инженер измеряет модуль Юнга стержня, нагружая его и измеряя удлинение. Какой модуль Юнга он измерит?

Решение. Очевидно, сила натяжения одинакова во всех сечениях, поэтому оба стержня, составляющие составной стержень, растягиваются одинаковой силой. Следовательно, удлинение составного стержня Δl можно найти так:

$$\Delta l = \frac{F(2l / 3)}{SE_1} + \frac{F(l / 3)}{SE_2} = \frac{Fl}{3S}\left(\frac{2}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right).$$

Отсюда находим модуль Юнга составного стержня:

$$\frac{1}{E_c} = \frac{S\Delta l}{Fl} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) = \frac{2E_2 + E_1}{3E_1E_2}, \text{ или } E_c = \frac{3E_1E_2}{2E_2 + E_1}.$$

Рассмотренные деформации растяжения—сжатия не исчерпывают всех возможных вариантов деформации тел. Рассмотрим элемент в форме прямоугольного параллелепипеда, закрепим его нижнее основание, а к верхнему основанию приложим силу, параллельную верхней грани (рис. 10.2). Слои параллелепипеда сдвинутся, оставаясь параллельными

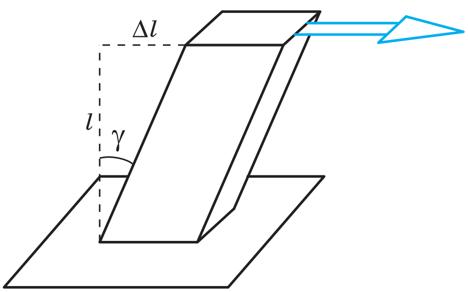


Рис. 10.2

друг другу; вертикальные грани, оставаясь плоскими, отклонятся от вертикали на некоторый угол γ.

Деформация, при которой происходит смещение слоёв тела относительно друг друга, называется **деформацией сдвига**.

Рассуждения, аналогичные проведённым выше для растяжения—сжатия, приводят к закону Гука для деформации сдвига. Тангенс угла сдвига $\operatorname{tg}\gamma = \Delta l / l$ (или сам угол при малых деформациях, которые только и являются упругими) пропорционален касательному напряжению τ:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}. \qquad \textbf{(10.3)}$$

Здесь τ — касательное напряжение для элемента, которое определяется как отношение сдвигающей силы к площади элемента:

$$\tau = \frac{F}{S},$$

а G — модуль сдвига, который, так же как и модуль Юнга, является характеристикой только материала, но не геометрии рассматриваемого элемента. Для большинства материалов модуль сдвига по порядку величины близок к модулю Юнга, но всё-таки имеет несколько меньшее значение.

Томас Юнг (1773—1829) — английский физик, физиолог, востоковед. С детства был настоящим вундеркиндом: в два года читал, в восемь решал сложные математические задачи, в четырнадцать свободно говорил на десяти (!) языках (в том числе на древнегреческом и древнееврейском). В 21 год стал академиком — членом Лондонского королевского общества. Сфера научных интересов Юнга была необычайно широка — физика, химия, физиология, медицина, астрономия, геофизика, техника, филология, музыка, живопись. Достаточно перечислить только некоторые работы, опубликованные Юнгом за несколько лет: о жёлтой лихорадке, о плотничьем ремесле, о переработке железной руды, о гидравлике, о средствах укрепления остовов кораблей, об атмосфере Луны, о роли сердца и артерий в циркуляции крови, о трении в осях машин, о теории приливов и отливов, о восстановлении и переводе греческих надписей, о составлении грамматики, о теории эпициклоидальных кривых, о нравах пауков, о капиллярности, о ежегодной ренте. Кажется, что перед нами перечень трудов не одного учёного, а нескольких академий!

Главным «физическим» достижением Юнга стали эксперименты по дифракции и интерференции света. Юнг первым объяснил эти явления волновой природой света. Корпускулярная теория света Ньютона была побеждена волновой теорией Гука, Гюйгенса, Юнга, Френеля. Но Юнг продолжил и ещё одно направление работы Гука. Он первым понял, как «освободить» жёсткость тела от его размеров, и ввёл модуль упругости, являющийся характеристикой материала тела.

Главными «нефизическими» достижениями Юнга были первая расшифровка древнеегипетских текстов Розеттского камня (которые в последующем, используя результаты Юнга, полностью прочитал Ф. Шампольон), теория трёхкомпонентного цветового зрения и аккомодации глаза человека.

Он был невероятно, невозможно, немыслимо талантлив. И жил, полностью отдавая себя науке. Имя Юнга по-английски значит «молодой» (и произносится как Янг, а не так, как по-русски, — Юнг). Таким он и остался в истории науки — молодым, красивым, гениальным.

10.3. Коэффициент Пуассона

Приложим к стержню с закреплённым основанием растягивающую силу, равномерно распределённую по его сечению. Как показывает опыт, стержень не только растянется в продольном направлении, но и сожмётся в поперечном.

Отношение поперечной и продольной относительных деформаций стержня при его растяжении—сжатии называется **коэффициентом Пуассона**.

Если принять стандартное для теории упругости правило знаков: деформации растяжения (и напряжения растяжения) считать положительными, а деформации сжатия (и напряжения сжатия) считать отрицательными, определение коэффициента Пуассона имеет вид

$$\mu = -\frac{\Delta d}{d}\frac{l}{\Delta l}. \qquad \textbf{(10.4)}$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона, l и d — продольный и поперечный размеры стержня до деформации, Δl и Δd — продольная и поперечная деформации стержня (рис. 10.3). Коэффициент Пуассона зависит только от материала стержня, но не от его размеров. Не зависит он и от то-

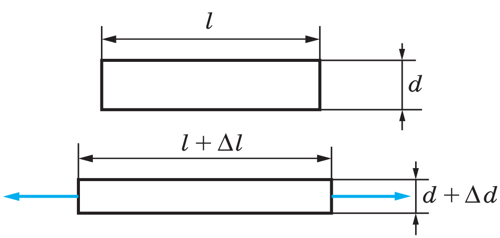


Рис. 10.3

го, рассматриваем ли мы растяжение или сжатие. Знак «–» в формуле (10.4) подчёркивает противоположность знаков продольной и поперечной деформаций — если мы растягиваем стержень, то в поперечном направлении он сжимается и наоборот.

Установим естественные границы для коэффициента Пуассона. Ясно, что поперечное сжатие стержня при продольном растяжении или поперечное расширение при продольном сжатии связано с сохранением объёма (см. рис. 10.3). А если бы объём вообще не менялся при растяжении—сжатии, каким был бы коэффициент Пуассона? Коэффициент Пуассона в этом случае равнялся бы 0,5. Действительно, пусть стержень цилиндрической формы длиной l и радиусом поперечного сечения r под действием растягивающей силы F растягивается на длину Δl, а радиус сечения уменьшается на Δl. Тогда старый и новый объёмы стержня были бы соответственно равны $\pi r^2 l$ и $\pi(r - \Delta r)^2(l + \Delta l)$. Раскрывая в этом выражении скобки и отбрасывая произведение малых величин (которое является очень малой величиной; на математическом языке — малой величиной второго порядка), получим в случае неизменного объёма стержня

$$2\pi r l \Delta r = \pi r^2 \Delta l. \qquad (10.5)$$

Отсюда находим коэффициент Пуассона в случае неизменного объёма при деформации:

$$\mu = \frac{\Delta r l}{r \Delta l} = \frac{1}{2}. \qquad (10.6)$$

В реальной ситуации объём стержня при растяжении должен увеличиваться. Поэтому равенства (10.5) нужно заменить на неравенства:

$$2\pi r l \Delta r < \pi r^2 \Delta l \quad \Rightarrow \quad \mu < \frac{1}{2}. \qquad (10.7)$$

У пластичных материалов коэффициент Пуассона составляет 0,3—0,35. У стали — 0,25, у алюминия — 0,34, у многих металлов он близок к 0,3. У хрупких материалов коэффициент Пуассона близок к нулю.

Интересно, что существуют материалы, которые имеют отрицательный коэффициент Пуассона. Такие материалы называют **ауксетиками**. При приложении к ним растягивающего усилия их поперечное сечение увеличивается. Отрицательным коэффициентом Пуассона обладают многие металлы, вещества с кубической кристаллической решёткой. Многие современные полимерные материалы имеют коэффициент Пуассона, который становится отрицательным при больших деформациях.

10.4. Обобщённый закон Гука

Пусть имеется прямоугольный параллелепипед, изготовленный из изотропного материала (упругие свойства которого одинаковы в разных направлениях). Грани параллелепипеда перпендикулярны осям системы координат (рис. 10.4). Приложим к граням параллелепипеда напряжения σ_x, σ_y и σ_z (для определённости — растяжения). Каждое из напряжений вызывает деформацию кубика «в своём» направлении и противоположную по знаку деформацию в поперечном направлении. Поэтому деформация в направлении оси OX будет вызываться напряжением σ_x и через коэффициент Пуассона напряжениями σ_y и σ_z. В результате закон Гука для трёхосного напряжения тела имеет вид

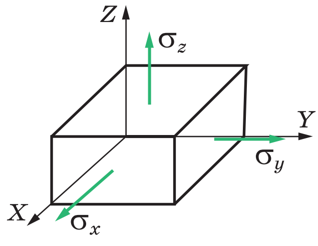
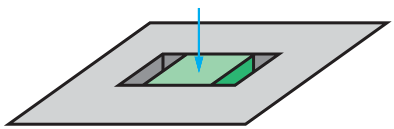


Рис. 10.4

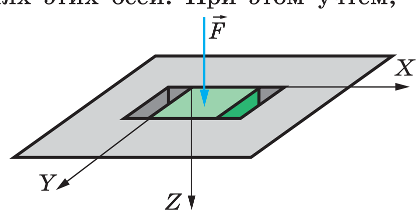
$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right), \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right), \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \mu\left(\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E}\right). \end{aligned} \tag{10.8}$$

Закон (10.8) называется **обобщённым законом Гука** и говорит о том, что деформации тела по разным осям «перепутываются», и потому их нельзя рассматривать независимо.



Задача 10.2. Резиновый кубик вставляют в прямоугольную полость в стальной детали так, что кубик полностью погружён в полость, две его боковые грани касаются двух противоположных граней полости, а между двумя другими боковыми гранями и стенками полости есть небольшой зазор (см. рисунок). Какой минимальной силой надо подействовать на верхнюю грань кубика, чтобы он коснулся всех стенок полости? Каким будет изменение объёма кубика в этом случае? Длина ребра кубика и короткой стороны полости равна a, длина более длинной стороны полости $(1 + \delta)a$, где величина δ мала ($\delta \ll 1$).

Решение. Так как величина δ мала, деформация кубика упругая, и для её исследования можно использовать закон Гука. Выберем оси координат так, как показано на рисунке, и запишем обобщённый закон Гука для деформаций кубика в направлениях этих осей. При этом учтём, что относительная деформация кубика в направлении оси OX равна δ:



$$\varepsilon_x = \frac{(1+\delta)a - a}{a} = \delta,$$

а напряжение равно нулю: $\sigma_x = 0$ (при искомой нагрузке кубик только коснулся соответствующих граней полости), в направлении OY кубик не деформируется, так как не деформируется полость: $\varepsilon_y = 0$ (сталь гораздо жёстче резины):

$$\delta = -\mu\left(\frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\right),$$

$$0 = \frac{\sigma_y}{E} - \mu\frac{\sigma_z}{E}, \qquad (*)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \mu\frac{\sigma_y}{E}.$$

Решая систему уравнений (*), получаем

$$\sigma_z = -\frac{\delta}{\mu(1+\mu)}E, \qquad \sigma_y = -\frac{\delta}{1+\mu}E, \qquad \varepsilon_z = -\frac{\delta(1-\mu)}{\mu} \qquad (**)$$

(отрицательность напряжений σ_z, σ_y означает сжатие кубика в соответствующих направлениях). Отсюда находим абсолютное значение силы, которую нужно приложить к кубику, чтобы он коснулся всех граней полости

$$F = \frac{\delta E a^2}{\mu(1+\mu)}.$$

Новый объём кубика находим как произведение длин деформированных сторон:

$$V = (1+\delta)a \cdot a \cdot (1+\varepsilon_z)a \approx (1+\delta+\varepsilon)a^3$$

(произведение малых величин отброшено). Отсюда с использованием формулы (**) находим

$$\Delta V = -\frac{\delta(1-2\mu)}{\mu}a^3.$$

Как и должно быть, при $\mu = 1/2$ объём кубика не меняется, в случае $\mu < 1/2$ — уменьшается.

10.5. Упругость как причина колебаний. Вспоминаем физику

Упругие свойства материала определяют его прочность. Но упругость приводит также и к тому, что в телах могут возникать колебания, и иногда весьма заметные. Такое колебательное движение используется человечеством при измерении времени, когда длительность интервалов измеряется в периодах тех или иных колебаний. Давайте вспомним, как описываются колебания[1].

[1] Дальнейший материал настоящей главы требует минимальных знаний высшей математики. Но если вы не знаете, что такое производная, лучше пропустите остаток этой главы. Но мы верим, ваше время ещё придёт!

В качестве примера рассмотрим движение тела на гладкой горизонтальной поверхности под действием пружины, второй конец которой закреплён (рис. 10.5). Чтобы найти зависимость координаты тела от времени, используем второй закон Ньютона, который даёт

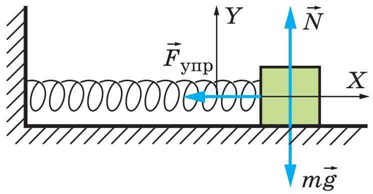


Рис. 10.5

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{упр}, \qquad (10.9)$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}$ — сила реакции опоры, $\vec{F}_{упр}$ — сила упругости, возникающая в пружине благодаря её деформации. Поместим начало системы координат в положение равновесия тела, ось OX направим вдоль пружины (см. рис. 10.5). Тогда проекция силы упругости на ось OX может быть записана как $\left(\vec{F}_{упр}\right)_x = -kx$, где k — жёсткость пружины, x — координата, которая при нашем выборе системы координат совпадает с удлинением пружины. Поэтому уравнение (10.9) в проекциях на ось OX даёт

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \qquad (10.10)$$

Таким образом, вторая производная зависимости координаты от времени по времени пропорциональна самой координате. Уравнения, связывающие неизвестные функции и их производные (в данном случае неизвестную зависимость $x(t)$ координаты от времени и её вторую производную), называются **дифференциальными уравнениями**. Дифференциальные уравнения определяют очень жёсткие ограничения на возможный вид этих функций, которые, таким образом, могут быть из этих уравнений почти однозначно найдены. Для уравнения (10.10) с помощью непосредственного вычисления второй производной можно проверить, что функция

$$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t, \qquad (10.11)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$, A и B — постоянные, является решением уравнения (10.10) при любых постоянных A и B. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что ни для какой другой функции $x(t)$ условие (10.10) выполняться не будет, и потому зависимость координаты пружинного маятника от времени может описываться только функцией (10.11).

С помощью известной тригонометрической формулы функцию (10.11) можно привести к виду

$$x(t) = \sqrt{A^2 + B^2}\sin(\omega t + \varphi) = C\sin(\omega t + \varphi), \qquad (10.12)$$

где $\operatorname{tg}\varphi = B/A$. Из формулы (10.12) видно, что координата пружинного маятника изменяется по синусоидальному закону. Такие колебания, когда зависимость координаты тела от времени является тригонометрической функцией (синусоидой или косинусоидой), называются **гармоническими**. Из формулы (10.12) следует, что колебания пружинного маятника — гармонические, причём величина C характеризует максимальное отклонение тела от положения равновесия, или **амплитуды** колебаний. Аргумент синуса в (10.12) принято называть **фазой** колебаний; величину φ — значение фазы при $t = 0$ — **начальной фазой**.

Дифференцируя выражение (10.11) (или (10.12)) по времени, можно найти зависимость скорости колеблющегося тела от времени:

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t - B\omega\sin\omega t = C\omega\cos(\omega t + \varphi). \qquad (10.13)$$

Постоянные A и B в формулах (10.11) и (10.13) определяются начальными условиями. Если в начальный момент времени координата тела равна x_0, а проекция скорости — v_0, то из формул (10.11) и (10.12) при $t = 0$ получаем

$$\begin{aligned} &x(t=0) = x_0 = B \quad \Rightarrow \quad B = x_0; \\ &\frac{dx(t=0)}{dt} = v_0 = A\omega \quad \Rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega}. \end{aligned} \qquad (10.14)$$

Величина ω в выражениях (10.11)—(10.14) называется **круговой частотой** колебаний. Эта величина связана с **периодом** колебаний. Действительно, поскольку период тригонометрических функций равен 2π, то значения координаты и скорости тела повторяются через такие интервалы времени, когда аргумент синуса или косинуса изменяется на $2\pi n$ (n — целое число). Поэтому минимальный интервал времени, через который повторяется движение, — **период** колебаний — равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (10.15)$$

Связь круговой частоты и периода колебаний (10.15) похожа на связь угловой скорости вращающегося тела и периода вращения (9.2). Конечно, это не случайно. Проекция вращающегося тела на любую ось, лежащую в плоскости вращения, совершает гармонические колебания, период вращения которых равен периоду колебаний, а угловая скорость совпадает с круговой частотой. Отсюда и следует связь формул (10.15) и (9.2).

Выражения (10.11)—(10.13) представляют собой зависимости координаты и скорости пружинного маятника от времени, время t в этих выражениях — переменная, и подстановка любого значения t позволяет находить координату и скорость тела в этот момент времени. Рассмотрим пример.

Задача 10.3. Пружинному маятнику (см. рис. 10.5), находящемуся в положении равновесия, толчком сообщают скорость v_0. Через какое минимальное время скорость тела будет равна половине начальной скорости? Через какие промежутки времени тело будет отклонено от положения равновесия на половину амплитуды (независимо от того, в какую сторону)? Масса маятника m, жёсткость пружины k.

Решение. Как было доказано выше, зависимости координаты и скорости пружинного маятника от времени определяются формулами (10.11), (10.13), в которых $\omega = \sqrt{k / m}$, а постоянные A и B следует выбрать так, чтобы выполнялись начальные условия. Подставляя в эти формулы значение времени $t = 0$, получаем

$$A = v_0 / \omega, \; B = 0.$$

Зависимости координаты и скорости маятника от времени имеют вид

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t, \qquad v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0\cos\omega t. \qquad (*)$$

Из первого соотношения (*) следует, что амплитуда колебаний маятника равна v_0 / ω, а начальная скорость v_0 — амплитуда колебаний скорости (т. е. максимальное значение скорости тела в процессе колебаний). Чтобы найти время τ, через которое скорость тела станет равна половине максимальной, подставим время τ во вторую зависимость (*):

$$\frac{v_0}{2} = v_0\cos\omega\tau \qquad \Rightarrow \qquad \cos\omega\tau = \frac{1}{2}. \qquad (**)$$

Уравнение (**) имеет бесконечно много решений, следовательно, существует бесконечно много моментов времени, когда скорость тела равна половине максимальной. Нам нужно найти минимальный положительный корень. Поэтому из уравнения (**) получаем

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Для ответа на второй вопрос воспользуемся первым из уравнений (*):

$$\pm\frac{v_0}{2\omega} = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega\tau \qquad \Rightarrow \qquad \sin\omega\tau = \frac{1}{2}$$

(знак $\pm$ появился потому, что по условию требуется исследовать отклонения от положения равновесия как в одну, так в другую сторону). Решая это уравнение и выбирая положительные корни, получаем две серии решений:

$$\tau = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad \tau = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

10.6. Закон сохранения энергии при колебаниях. Условия гармоничности колебаний

Важным методом описания колебаний является использование закона сохранения энергии. В пренебрежении силами трения или сопротивления механическая энергия любой колебательной системы, которая представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий, сохраняется. **Кинетическая энергия** любого тела является квадратичной функцией его скорости:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

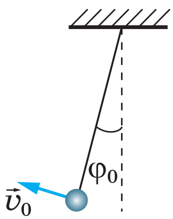
А вот зависимость $U(x)$ **потенциальной энергии** от отклонения от положения равновесия должна представлять собой некоторую «потенциальную яму», так, чтобы были определены положение равновесия тела (экстремум потенциальной энергии) и сила, возвращающая его в положение равновесия при отклонении (минимум потенциальной энергии). Очевидно, что эта сумма будет постоянной для $v \sim \sin \omega t$ и $x \sim \cos \omega t$ только в том случае, когда потенциальная энергия представляет собой квадратичную функцию координаты: $U(x) \sim x^2$ (в этом случае основное тригонометрическое тождество уберёт зависимость энергии от времени).

Следовательно, условием гармоничности колебаний является квадратичная зависимость потенциальной энергии от отклонения от положения равновесия. Для пружинного маятника эта функция представляет собой квадратичную параболу

$$U(x) = \frac{kx^2}{2}, \tag{10.16}$$

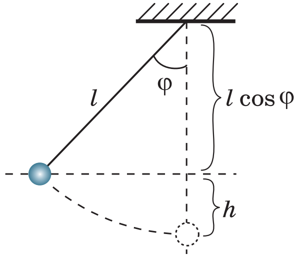
а колебания являются гармоническими. Это условие является общим: колебания любой системы (независимо от её природы), потенциальная энергия которой квадратично зависит от отклонения от положения равновесия, будут обязательно гармоническими с круговой частотой $\omega = \sqrt{k / m}$, где k — коэффициент пропорциональности в зависимости потенциальной энергии от отклонения. И таких систем в природе и технике много — практически любая система, имеющая минимум потенциальной энергии, вблизи этого минимума описывается параболической функцией.

В качестве примера рассмотрим математический маятник. Математическим маятником называют тело, обладающее массой, совершающее колебания на длинной, невесомой и нерастяжимой нити. Размерами тела можно пренебречь в сравнении с длиной нити. Название такой колебательной системы — «математический маятник» — связано с тем, что она представляет собой абстрактную математическую модель реального (физического) маятника. Докажем, что малые колебания математического маятника являются гармоническими.



Задача 10.4. Определите круговую частоту и период колебаний математического маятника длиной l. На какой максимальный угол отклонится маятник от положения равновесия, если маятнику, отклонённому в начальный момент времени на угол φ_0 от положения равновесия, толчком сообщить скорость v_0 (см. рисунок)? Какую долю от максимальной скорости будет составлять скорость маятника в тот

момент, когда его отклонение от положения равновесия составит половину амплитуды?



Решение. Выберем за начало отсчёта потенциальной энергии маятника тот уровень, на котором маятник находится в положении равновесия. Тогда его потенциальная энергия при отклонении на некоторый угол φ определяется высотой h подъёма над этим уровнем и может быть найдена геометрически. Из рисунка находим

$$h = l - l\cos\varphi = 2l\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

При малых отклонениях синус угла можно заменить значением самого угла. Поэтому потенциальная энергия математического маятника, отклонённого на малый угол φ, равна $mgl\varphi^2/2$. В результате для полной энергии математического маятника, совершающего малые колебания около положения равновесия, имеем

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2}.$$

Отсюда следует, что малые колебания маятника являются гармоническими, а их круговая частота и период соответственно равны

$$\omega = \sqrt{g\ /\ l}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где g — ускорение свободного падения, l — длина маятника.

Используем теперь закон сохранения энергии для маятника. В момент его отклонения на максимальный угол скорость маятника равна нулю. Поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mgl\varphi_0^2}{2} = \frac{mgl\varphi_1^2}{2},$$

где φ_1 — максимальный угол отклонения. Отсюда находим

$$\varphi_1 = \sqrt{\varphi_0^2 + \frac{v_0^2}{gl}}.$$

В момент прохождения положения равновесия угол отклонения маятника равен нулю, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{mgl\varphi_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2},$$

где v_1 — максимальная скорость маятника. В результате находим

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + gl\varphi_0^2}.$$

10.7. Колебания и измерение времени

Важная особенность гармонических колебаний состоит в том, что их период не зависит от амплитуды, а зависит только от параметров самой колебательной системы — от ускорения свободного падения и длины подвеса (для математического маятника) или от массы груза и жёсткости пружины (для пружинного маятника). Поэтому период колебаний какой-либо заданной колебательной системы можно принять за эталон времени. И любые интервалы времени можно измерять в периодах колебаний.

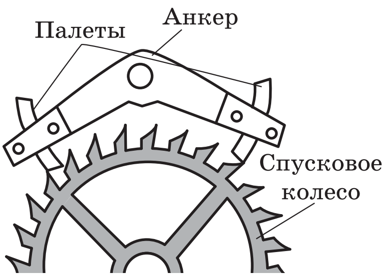


Рис. 10.6

Однако реализовать эту идею оказалось не так просто. Считается, что Галилео Галилей первым заметил независимость периода колебаний математического маятника от амплитуды. Он же предложил и основную идею часов — маятник, соединённый со счётчиком колебаний. Но реализовать эту идею — построить надёжный, устойчиво работающий часовой механизм — Галилей не смог. Через несколько десятилетий после Галилея замечательный учёный и гениальный часовщик Христиан Гюйгенс внёс в конструкцию Галилея несколько принципиальных усовершенствований — придумал сначала шпиндельный, а затем и анкерный механизм (рис. 10.6), позволяющий передавать энергию подвешенной гири маятнику и поддерживать его незатухающие колебания. Гюйгенс понял, что период колебаний маятника не зависит от амплитуды только для малых углов, и сконструировал устройство «циклоидальные часы», которое обеспечивало независимость периода от амплитуды.

Другой замечательный физик, Роберт Гук, придумал использовать в часах не подвесной, а пружинный маятник. Причём пружину сделать в форме спирали, совершающей гармонические крутильные колебания. Другая пружина в часах Гука выполняла роль гири — подпитывала колебания энергией, делая их незатухающими. В результате уже к середине XVIII в. в Европе удалось наладить массовое производство компактных пружинных механических часов, дававших ошибку в несколько секунд в сутки!

Для бытовых потребностей этого достаточно... А нужно ли нам знать время более точно? Оказывается, нужно! И это связано с мореплаванием и навигацией. Две координаты определяют положение точки на поверхности Земли — широта и долгота. Широта — это угол между направлением на точку и плоскостью экватора, а долгота — угол между двумя меридианами — Гринвичским и проходящим через исследуемую точку. Как их измерять? Поскольку Солнце движется практически в плоскости экватора, то широту легко измерить по углу подъёма Солнца над горизонтом в 12:00.

А как измерить долготу? Тоже понятно. С меридианом связан часовой пояс, поэтому если мы знаем астрономическое время в точке наблюдения (а 12 ч мы легко определим — по максимальной высоте солнца над горизонтом) и знаем, насколько это время отличается от гринвичского, то мы определим долготу местности. А для этого нужны часы, идущие по гринвичскому времени. Но требуемой точности — не более секунды в сутки — часы XVIII в. не обеспечивали. Поэтому ведущие морские державы — Испания, Португалия, Голландия, Франция и Великобритания — учредили за решение этой проблемы фантастические премии: в современном эквиваленте десятки миллионов долларов. В парламентах были созданы специальные комиссии, рассматривающие проекты. В этом «соревновании» участвовали все ведущие физики и инженеры — Галилей, Гюйгенс, Гук, Ньютон... А также множество шарлатанов — уж очень большим был приз!

В 1728 г. в соревнование вступил часовщик-самоучка **Джон Харрисон**. Он вспомнил об идее Гука, т. е. о часах со спиральной пружиной, которая выполняла функции маятника. Но сделал много (на современном языке) инноваций — использовал древесину бакаут для изготовления подшипников (деревянные часы с такими подшипниками идут до сих пор), биметаллический маятник (для компенсации теплового расширения), рубиновые и алмазные подшипники, карданный подвес, использовал высокую частоту колебаний маятника.

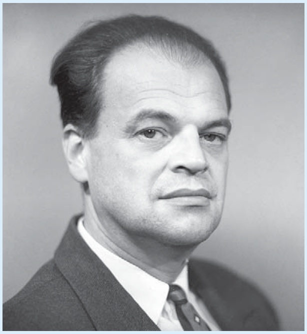
В 1741 г. Харрисон создал маятниковые часы, в которых для компенсации качки использовал карданов подвес. Часы давали суточный уход 2 с и позволяли находить своё положение с точностью около 10 миль. Однако английский парламент к тому времени изменил условия конкурса — теперь требовалась не только точность, но и компактность.

В 1760 г. Харрисон сделал часы диаметром 12 см, которые за месяц дали уход всего 2 с. Тем не менее Харрисону долго пришлось бороться с парламентской комиссией по долготе, доказывая возможности своих часов. К этой борьбе пришлось даже подключать короля, который тоже давил на комиссию. Харрисон всё-таки получил деньги. К 83-му дню рождения...

Однако, несмотря на множество участников, эта задача казалась современникам нерешаемой. Дж. Свифт в «Путешествиях Гулливера» даже сравнивал её с задачей построения вечного двигателя.

Сейчас более точно измерять время нам позволяют кварцевые часы (уход — 1 с за несколько месяцев). В них используется кристалл кварца определённой формы (типа камертона), который играет роль маятника. Кварц — пьезоэлектрик, при его колебаниях генерируется переменное напряжение, которое и определяет ход часов. Частоту колебаний кристалла можно «выставить» с высокой точностью, а колебания поддерживать, прикладывая к кристаллу постоянное напряжение.

А наиболее точными являются атомные часы. Периодический процесс в них — атомные колебания — обеспечивает поразительную точность — $\Delta\nu / \nu \sim 10^{-14}$. Первые атомные часы в СССР были созданы под руководством лауреата Нобелевской премии академика Николая Геннадьевича Басова.



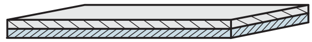
Николай Геннадьевич Басов (1922—2001) — советский физик, академик, лауреат Нобелевской премии по физике. Закончил школу в июне 1941 г. В начале Великой Отечественной войны был призван на военную службу, закончил ускоренные фельдшерские курсы и был отправлен на фронт. Выносил раненых, спасал солдат, делал срочные операции буквально на поле боя. В сентябре 1945 г. как закончивший с отличием школу был принят на первый курс Московского инженерно-физического института для работы по ядерной программе. В 50-е гг. XX в. Н. Г. Басову и А. М. Прохорову удалось реализовать идею А. Эйнштейна о вынужденном излучении атомов среды с инверсной заселённостью и создать первый квантовый генератор — мазер. В 1964 г. Н. Г. Басову, А. М. Прохорову и американскому физику Ч. Таунсу была присуждена Нобелевская премия «за фундаментальные работы, которые привели к созданию генераторов, работающих на лазерно-мазерном принципе» [25]. В последующем Басов выдвинул целый ряд идей использования лазера, которые значительно опередили время и реализуются только сейчас. Это, например, использование лазера в управляемом термоядерном синтезе для удержания горячей плазмы, в оптоволоконных линиях связи и квантовых компьютерах. Н. Г. Басов разработал физические основы квантовых стандартов частоты, на которых основана российская система глобальной спутниковой навигации ГЛОНАСС. В МИФИ и сейчас работает кафедра лазерной физики, созданная Н. Г. Басовым.

Задачи для самостоятельного решения

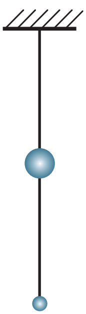
10.1. Какой высоты можно изготовить колонну из гранита, чтобы она не разрушилась под собственным весом? Предел прочности гранита $\sigma_0 = 250 \cdot 10^6$ Па, плотность гранита $\rho = 2600$ кг/м^3. Сравните результат с высотой самых высоких гор на Земле. Какой будет относительная деформация гранита перед разрушением?

10.2. Основание железного цилиндра, радиус которого $r = 10$ см и высота $h = 20$ см, закреплено. На второе основание параллельно ему действует сила $F = 20\ 000$ Н. Чему равно смещение этого основания? Модуль сдвига для железа $G = 76 \cdot 10^9$ ГПа.

10.3. Во многих инженерных системах в качестве датчиков, испытывающих значительные деформации при изменении температуры, используются биметаллические пластины (см. рисунок). Такая пластина состоит из двух пластинок из металлов с отличающимися коэффициентами термического расширения, скреплённых между собой по всей поверхности контакта. Объясните, почему такая пластина будет изгибаться при нагревании или охлаждении, и оцените глубину прогиба пластины при повышении температуры на $\Delta T = 100\,^\circ\text{C}$. Длина пластины $l = 10$ см, толщина $\Delta h = 0{,}5$ мм, коэффициенты теплового расширения металлов, входящих в её состав: $\alpha_1 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$ (сталь) и $\alpha_2 = 1{,}9 \cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$ (латунь). Толщина пластины много меньше радиуса изгиба. Сравните прогиб и удлинение пластины.

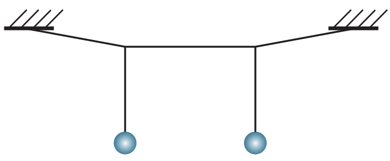


10.4. Колебательная система представляет собой лёгкий стержень, на концах которого закреплены маленькие шарики с массами m и $2m$. Стержень может вращаться вокруг горизонтальной оси, делящей стержень на две части длинами l и $3l$. Определите круговую частоту малых колебаний системы.



10.5. Соберите колебательную систему, показанную на рисунке: два математических маятника, привязанные один к другому. Масса верхнего маятника должна быть гораздо больше массы нижнего, их длины должны быть одинаковы. Отклоните нижний маятник (второй должен висеть свободно) и отпустите. Объясните поведение системы. Проведите исследование влияния соотношения масс маятников на их колебания.

10.6. Соберите колебательную систему, показанную на рисунке, — два математических маятника на горизонтальной нити. Горизонтальную нить нужно натянуть несильно, математические маятники должны иметь одинаковую длину. Отклоните один маятник (второй должен висеть свободно) и отпустите. Объясните поведение системы. Проведите исследование влияния на колебания маятников натяжения горизонтальной нити. Если маятники сделать длинными (от потолка до пола), колебания системы будут очень эффектными!



ГЛАВА 11

ТРЕНИЕ ТОРМОЗЯЩЕЕ И ТРЕНИЕ РАЗГОНЯЮЩЕЕ

Трение — друг или враг?

11.1. Трение в жизни человека

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Просто потому, что без трения этого самого шага мы не смогли бы сделать — у нас по полу скользили бы ноги. При отсутствии трения машины не могли бы ездить, вещи нельзя было бы удержать в руках, никакой звук не умолкал бы, а звучал бы бесконечным эхом, отражаясь и отражаясь от стен комнаты. Изумлённый наблюдатель увидел бы, как рушатся горы, ураганные ветры и морские волны бесконечно властвуют над Землёй. Все тела сползают куда-то вниз, а всё, что даёт нам прикладная механика — машины, механизмы, технические устройства,— разваливается на отдельные детали, поскольку болты без трения не могут удержать их... Одежда без трения не держится на людях... Предметы соскальзывают в самый низкий угол комнаты... Даже огонь наши предки без трения не смогли бы добыть... В то же время трение представляет источник потерь механической энергии, из-за трения нагреваются и изнашиваются движущиеся части машин, и его приходится уменьшать. Например, для перетаскивания грузов человечество придумало колесо, заменив трение скольжения трением качения, которое значительно меньше. Между трущимися поверхностями вводится смазка, которая уменьшает трение. Так что давайте рассмотрим трение с разных позиций и поймём его плюсы и минусы для человечества.

11.2. Вспоминаем физику

Сила трения возникает при скольжении тел по тем или иным поверхностям или при попытке сдвинуть тело вдоль поверхности. Природа этой силы заключается в том, что все реальные поверхности являются шероховатыми, при скольжении одной поверхности по другой шероховатости взаимодействуют, «зацепляются» друг за друга, деформируют друг друга и т. д. Это приводит к тому, что при скольжении по какой-либо поверхности тела испытывают противодействие со стороны этой поверхности, т. е. действие определённой силы в направлении, противоположном движению и параллельном поверхности.

Различают несколько видов силы трения, в первую очередь сухое (твёрдое тело о твёрдую поверхность) и жидкое (движение тела в жидкости). Для **сухого трения** (которое только и будет рассматриваться далее) характерно наличие определённого «порога сдвига»: при действии силы, меньшей некоторого значения, покоящееся на шероховатой поверхности тело будет продолжать покоиться. Тело, находящееся в жидкости, можно заставить двигаться сколь угодно малой силой.

Сухое трение также подразделяется на несколько видов. Трение, возникающее при попытке сдвинуть покоящееся тело, называют **трением покоя**. Сопротивление относительному перемещению тела по поверхности называется **трением движения**, которое, в свою очередь, делится на трение скольжения и трение качения.

Пока тело пребывает в покое на некоторой поверхности, сила трения однозначно определяется условиями равновесия тела и не зависит от свойств шероховатостей тела и поверхности.

При увеличении силы, стремящейся сдвинуть тело (сдвигающей силы), пока тело остаётся в покое, будет возрастать и сила трения. Однако из опыта мы знаем, что при приложении достаточно большой сдвигающей силы любое свободно лежащее тело можно сдвинуть. Отсюда следует, что сила трения покоя не может возрастать выше какого-то определённого значения, или, другими словами, для данных тела и поверхности имеет максимум $F_{\text{тр}}^{\max}$. В XVII в. Г. Амонтон и в XVIII в. Ш. Кулон экспериментально установили, что максимальное значение силы трения покоя пропорционально силе реакции между телом и поверхностью N:

$$F_{\text{тр}}^{\max} = kN, \qquad \textbf{(11.1)}$$

причём безразмерный коэффициент пропорциональности k зависит от материала тела и поверхности и называется **коэффициентом трения**. Для множества самых разных трущихся поверхностей коэффициенты трения измерены и могут быть найдены в соответствующих справочниках. Приведём несколько значений: для стали по стали $k = 0{,}18$; для стали по льду $k = 0{,}02 - 0{,}03$; для резины по асфальту $k = 0{,}4 - 0{,}6$; для дерева по дереву (дуб по дубу) $k = 0{,}50$.

Если тело скользит по поверхности, то на тело действует **сила трения скольжения**. Опыты Г. Амонтона и Ш. Кулона показали, что в этом случае сила трения будет направлена противоположно скорости тела и равна по величине произведению силы нормальной реакции на коэффициент трения, который несколько меньше коэффициента трения, определяющего силу трения покоя.

Что касается **трения качения**, то оно возникает благодаря деформации поверхности — при качении мы должны как бы «вытаскивать тело из ямки на поверхности», и мы должны для этого затрачивать определённые усилия. Трение качения, как правило, существенно меньше трения скольжения.

Задача 11.1. Тело массой $m = 1$ кг положили на горизонтальную поверхность и подействовали на него горизонтальной силой F. Коэффициент трения между телом и поверхностью $k = 0{,}1$. Определите силу трения, действующую на тело, если $F = 0{,}5$ Н или $F = 2$ Н.

Решение. Из условия непонятно, будет тело двигаться под действием данной сдвигающей силы или нет. Поэтому исследуем сначала вопрос о покое или движении тела. Для этого сравним приложенную к телу сдвигающую силу и максимальную силу трения покоя:

$$F \quad \vee \quad F_{\text{тр}}^{\max} \qquad (*)$$

($\vee$ — знак сравнения, т. е. знак неравенства, который пока неизвестно в какую сторону развёрнут). Подчеркнём, что в правую часть сравнения (*) входит не сила трения, действующая между телом и поверхностью, а максимально возможная для этих поверхностей сила трения покоя. Для максимальной силы трения используем закон Кулона—Амонтона

$$F_{\text{тр}}^{\max} = kN. \qquad (**)$$

Силу реакции поверхности N найдём из второго закона Ньютона для нашего тела: $N = mg$. Отсюда следует (при $g = 10$ м/с^2), что максимальная сила трения покоя $F_{\text{тр}}^{\max} = 1$ Н больше сдвигающей силы $F = 0{,}5$ Н, и, значит, тело будет покоиться. Сила трения в этом случае будет равна сдвигающей силе:

$$F_{\text{тр}} = F = 0{,}5 \text{ Н}.$$

Сдвигающая сила $F = 2$ Н больше максимальной силы трения, поэтому под действием этой силы тело будет двигаться, и действующая на него сила трения будет равна максимальной силе трения покоя

$$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}^{\max} = kmg = 1 \text{ Н}.$$

Первые серьёзные исследования силы трения выполнил не физик, а... художник **Леонардо да Винчи**. В 1519 г. Леонардо да Винчи провёл серию экспериментов и установил, что максимальная сила трения покоя зависит от прижимающей силы (силы реакции) и не зависит от площади соприкасающихся поверхностей (совершенно неожиданный для его современников результат). Через 150—200 лет этот закон переоткрыл французский физик и механик, человек, создавший многие приборы, которыми до сих пор пользуется человечество, **Гийом Амонтон**. Ещё через 100 лет **Шарль Огюстен Кулон** провёл подробные экспериментальные исследования различия максимальной силы трения покоя и силы трения скольжения, обнаружив значительные отклонения силы трения от закона (11.1).

11.3. Самый удивительный закон физики

Известный физик Р. Фейнман назвал формулу (11.1) самым удивительным законом физики [26]. Не закон всемирного тяготения, не закон Кулона, не закон Ампера... И вот почему. Казалось бы, сила трения должна зависеть от огромного количества факторов — площади контакта, структуры шероховатостей, скорости, сил взаимодействия молекул. А зависит только от силы, прижимающей тело к поверхности, и одного экспериментально определяемого числа, которое спрятало в себе все неопределённости этой величины. Но давайте обсудим особенности формулы (11.1) по порядку.

Максимальная сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей. Удивительный факт! Ведь сила трения возникает благодаря «зацеплению» шероховатостей и, казалось бы, должна быть больше в случае большей площади контакта. Объясняется этот эффект тем, что взаимодействие шероховатостей зависит от того, как шероховатости тела и опоры «вдавлены» друг в друга. При большей площади соприкасающихся поверхностей сила, приходящаяся на единицу площади, меньше, и, следовательно, шероховатости слабее «вдавливаются» друг в друга и слабее взаимодействуют. То есть при увеличении площади контакта количество шероховатостей возрастает, но убывает сила их взаимодействия.

Коэффициент трения слабо зависит от степени обработки поверхностей. Ещё более удивительно! Сила трения возникает благодаря взаимодействию шероховатостей. Поэтому кажется, что чем лучше обработаны поверхности, тем меньше должен быть коэффициент трения. Но если бы было так, невозможно было бы ввести универсальный коэффициент трения, определяющийся только веществом тела и опоры. А его вводят, что и свидетельствует о слабой зависимости коэффициента трения от степени обработки поверхностей. Этот факт можно объяснить тем, что взаимодействуют не те шероховатости, которые были на поверхности тела и опоры до контакта, а те, которые в результате контакта тела и опоры получились. Конечно, такая независимость силы трения от степени обработки поверхностей является приближённой. Если поверхности обработаны «очень грубо», сила трения будет большой. Также большой она становится для «очень гладких» поверхностей, когда между многими атомами тела и опоры возникает такое же взаимодействие, как и между атомами, входящими в состав одного и того же тела.

Приводимые в таблицах коэффициенты трения тех или иных веществ друг о друга (например, сталь по стали) Фейнман назвал «сплошным надувательством» [26]. Ведь на поверхностях любых тел находятся примеси, оксиды, дефекты, и именно они дают основной вклад в силу трения, а совсем не сталь по стали. Поэтому правильнее говорить о коэффициенте трения той «грязи», которая бывает обычно на поверхности одной стали, по той «грязи», которая бывает на поверхности другой.

Сила сухого трения слабо зависит от скорости перемещения тела относительно поверхности. Тем не менее такая зависимость существует. Когда тело начинает скользить по поверхности, сила трения несколько уменьшается по сравнению с максимальным значением для покоящегося тела, а затем при дальнейшем увеличении скорости возрастает.

Формула (11.1) является приближённой и справедливой в небольшом интервале значений сил реакции, скоростей тел и степени обработки поверхностей.

11.4. Трение и автомобиль

Давайте обсудим вопрос о силе трения, действующей на ведущие колёса автомобиля, при (а) разгоне, (б) торможении, (в) повороте. Равна ли эта сила своему максимальному значению kN (k — коэффициент трения, N — сила реакции полотна дороги), и если да, то в каких ситуациях? А в каких ситуациях нет? Хорошо это или плохо, если сила трения достигает своего максимального значения? И почему? И какой автомобиль может развивать бо́льшую мощность — переднеприводный или заднеприводный — при одинаковой мощности двигателя и при условии симметричного распределения его массы?

Когда ведущие колёса не пробуксовывают, нижняя точка колеса не скользит по дороге, поэтому сила трения может не достигать своего максимального значения kN и может быть направлена по-разному. Если автомобиль едет с постоянной скоростью v, колёса вращаются с угловой скоростью v / R (R — радиус колеса) и есть только небольшое трение качения. Если водитель увеличивает угловую скорость вращения колёс, колесо в точке касания дороги «хочет» проскользнуть относительно дороги назад, «зацепляется» за шероховатости дороги, и возникает сила трения, направленная вперёд, причём не равная своему максимальному значению, если нет пробуксовки. Если водитель тормозит вращение колёс, они «хотят» проскользнуть в нижней точке вперёд относительно дороги, возникает сила трения, направленная назад. При повороте благодаря повороту передних колёс возникает сила трения, направленная в сторону поворота.

Обсудим теперь вопрос о роли трения в движении машины. Представим себе, что водитель машины, стоящей на гладком льду, когда полностью отсутствует сила трения между колёсами и льдом, нажимает на педаль газа. Что будет происходить? Ясно, что машина ехать не будет: колёса будут вращаться, но будут пробуксовывать относительно льда — ведь трения-то нет. Причём это будет происходить независимо от мощности двигателя. А это значит, что для того, чтобы использовать мощность двигателя, нужно трение — без него машина не поедет.

Если сила трения большая, то при плавном нажатии на педаль газа колёса начинают вращаться (речь сейчас идёт о ведущих колёсах автомобиля, допустим, это передние колёса) и как бы отталкиваются от шероховатостей дороги, используя силу трения, которая направлена вперёд (рис. 11.1). При этом колёса не проскальзывают, а катятся по дороге так, что нижняя точка колеса не перемещается относительно дороги. Иногда и при большом трении колёса пробуксовывают.

Рис. 11.1

Наверняка вы сталкивались с ситуацией, когда какой-нибудь водитель так трогается при включении зелёного сигнала светофора, что колёса «визжат», а на дороге остаётся чёрный след из-за скольжения резины по асфальту. То есть при резком торможении или трогании с пробуксовкой колёса проскальзывают относительно дороги; в обычных случаях колесо только катится, а не скользит по дороге.

Пусть теперь машина едет равномерно, а водитель нажимает на педаль газа. Он заставляет колёса вращаться быстрее, чем нужно при данной скорости машины. Колёса стремятся проскользнуть назад, возникает сила трения, направленная вперёд, которая и разгоняет машину (машина как бы отталкивается от шероховатостей дороги, используя силу трения). Если водитель нажимает на педаль тормоза, колесо стремится вращаться медленнее, чем нужно при данной скорости машины. Возникает сила трения, направленная назад, которая тормозит машину. Если водитель поворачивает колёса машины, возникает сила трения, направленная в сторону поворота, которая машину поворачивает. Таким образом, управление машиной — разгоном, торможением, поворотом — основано на правильном использовании силы трения. Конечно, подавляющее большинство водителей об этом даже не задумываются.

Равна ли эта сила своему максимальному значению? Вообще говоря, нет, поскольку нет скольжения колеса относительно дороги, а сила трения покоя достигает максимума kN, когда наступает скольжение. Поэтому, если мы разгоняемся (сила трения направлена вперёд), но хотим увеличить темп разгона, мы сильнее нажимаем на педаль газа и увеличиваем силу трения. Аналогично, если мы тормозим (сила трения направлена назад), но хотим увеличить степень торможения, мы сильнее нажимаем на тормоз и увеличиваем силу трения. Но её можно увеличить только в том случае, когда она не была максимальной! Таким образом, для управления машиной сила трения не должна равняться максимальному значению, и эту разность мы используем для совершения тех или иных манёвров. И любой водитель (даже если он ничего не знает про силу трения, а таких, конечно, подавляющее большинство) интуитивно чувствует, есть ли у него резерв силы трения, «далеко» ли машина от пробуксовки и есть ли возможность ею управлять.

Но есть одна ситуация, когда сила трения равна своему максимальному значению. Пусть водитель резко затормозил (заблокировал колёса) на скользкой дороге. Машина начинает скользить по дороге. Такое скольжение часто сопровождается боковым движением, которое называется **заносом**. Сила трения направлена противоположно скорости (назад) и равна своему максимальному значению. Эта ситуация очень опасна, ведь машина абсолютно неуправляема. Мы не можем повернуть (хоть как-то, хоть чуть-чуть), ведь для поворота нам нужна сила трения, направленная в сторону поворота, а в нашем распоряжении её нет — сила трения максимальна и направлена назад. Мы не можем увеличить скорость торможения (невозможно увеличить силу трения — она и так максимальна), не можем (даже если бы мы захотели этого в такой ситуации) ускориться. Мы не можем ничего! Ситуация осложняется ещё и тем, что в состоянии скольжения машину никто не «держит» на дороге. Почему машина в обычных условиях не съезжает в кювет, ведь полотно дороги всегда делается покатым к обочинам, чтобы стекала вода? Её держит сила трения, а вот если машина скользит, сила трения направлена противоположно скорости и никак иначе. Поэтому любое боковое возмущение — покатость дороги, небольшой камень под одним из колёс — может развернуть или сбросить машину на обочину. Никогда не следует допускать блокировки колёс[1].

Тем не менее бывают ситуации, когда занос автомобиля используется. Профессиональные автогонщики резко тормозят перед поворотами и, переводя машину в контролируемый занос, добиваются её поворота за счёт заноса. Такая техника прохождения поворотов позволяет существенно сократить время поворота, но требует очень высокой квалификации водителя.

Теперь сравним мощность, которую могут развивать при разгоне переднеприводный и заднеприводный автомобили с одинаковым двигателем. Разгоняет автомобиль сила трения, действующая на ведущие колёса, а она не может превышать значения kN (N — сила реакции). Поэтому чем больше сила реакции, тем бóльших значений может достигнуть разгоняющая сила трения (а нажатие на педаль газа в ситуации, когда сила трения достигла максимума, приведёт только к проскальзыванию и к заносу, но не к увеличению мощности, которую получает машина от двигателя). Найдём силы реакции для задних и передних колёс машины. Силы, действующие на машину при разгоне, показаны на рисунке 11.2 (на левом — для переднеприводной, на правом — для заднеприводной). На машину действуют сила тяжести, силы реакции и сила трения.

Поскольку машина движется поступательно, сумма моментов всех сил относительно её центра тяжести равна нулю. Поэтому, если центр тяжести

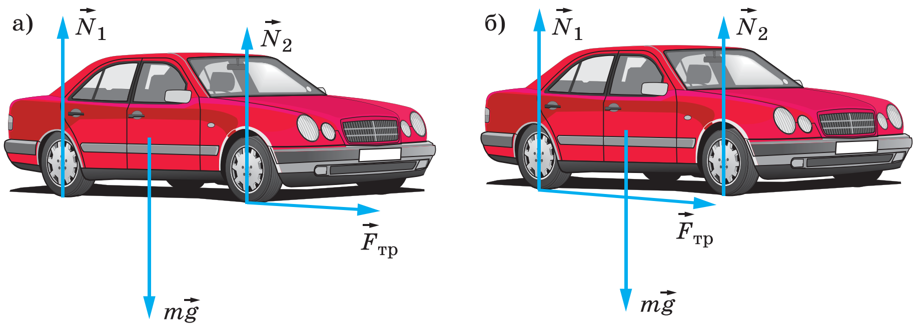


Рис. 11.2

[1] Для обеспечения устойчивости машины относительно боковых возмущений и более эффективного торможения используется антиблокировочная система тормозов, которая при скольжении машины на небольшие промежутки отключает тормоза. Колёса начинают вращаться, сила трения падает, есть возможность удержать машину на дороге и совершать манёвры. Работу антиблокировочной системы тормозов можно увидеть по тормозному следу такой машины — он является прерывистым.

машины находится точно посередине машины, расстояние между задними и передними колёсами равно l, а высота центра тяжести над дорогой — h, условие равенства нулю суммы моментов относительно центра тяжести даёт (при условии что машина движется, развивая максимальную мощность на максимуме силы трения):

переднеприводная машина $$N_1\frac{l}{2} = N_2\frac{l}{2} + F_{\text{тр}}h = N_2\frac{l}{2} + kN_2h, \qquad (*)$$

заднеприводная машина $$N_1\frac{l}{2} = N_2\frac{l}{2} + F_{\text{тр}}h = N_2\frac{l}{2} + kN_1h, \qquad (**)$$

где k — коэффициент трения. Учитывая, что и в том и в другом случае $N_1 + N_2 = mg$, из (*) найдём силу реакции для передних колёс переднеприводного автомобиля:

$$N_2^{(\text{пп})} = \frac{mgl\,/\,2}{l + kh} \qquad (***)$$

и из (**) силу реакции задних колёс:

$$N_1^{(\text{зп})} = \frac{mgl\,/\,2}{l - kh} \qquad (4*)$$

(здесь (пп) и (зп) — передний и задний привод). Отсюда находим отношение сил трения, разгоняющих переднеприводный и заднеприводный автомобили, и, следовательно, отношение мощностей, которые может развивать на дороге их двигатель:

$$\frac{P^{(\text{пп})}}{P^{(\text{зп})}} = \frac{l - kh}{l + kh}.$$

Для значений $l = 3$ м, $h = 0{,}5$ м и $k = 0{,}5$ имеем

$$\frac{P^{(\text{пп})}}{P^{(\text{зп})}} = 0{,}85.$$

Конечно, этот результат получен в предположении симметричного распределения массы автомобиля и, следовательно, одинаковых сил реакции на передних и задних колёсах автомобиля в покое. Но у реальных машин это не так. Зная о рассмотренном эффекте, производители заднеприводных автомобилей сдвигают массу машины — двигатель, пассажиров, бензобак — в конец автомобиля, переднеприводных — вперёд, увеличивая соответствующую силу реакции. Например, у первого советского переднеприводного автомобиля («Москвича-2141») двигатель был сдвинут вперёд настолько, что силы реакции, действующие на передние и задние колёса автомобиля без пассажиров, различались в несколько раз.

Ещё один эффект разницы сил реакции, действующих на передние и задние колёса автомобиля, заключается в следующем. Представьте, что вам нужно въехать в крутую горку по скользкой просёлочной дороге. Как лучше ехать? На заднеприводном автомобиле — как обычно, а вот на переднеприводном... задом! Это связано с тем, что при езде по склону увеличивается сила реакции на нижние колёса и уменьшается на верхние. Поэтому для более эффективного использования трения нужно ехать описанным образом.

Итак, мы познакомились с тем, как осуществляется разгон автомобиля с помощью силы трения, на качественном уровне. Давайте рассмотрим этот вопрос количественно.

Задача 11.2. Двигатель автомобиля может развивать мощность до $P = 100$ кВт. Автомобиль имеет массу $M = 800$ кг и привод двигателя на два колеса. До какой скорости v способен разогнаться этот автомобиль в оптимальном режиме разгона на дороге с хорошим сцеплением (без проскальзывания, коэффициент трения $k = 0{,}8$) за время $t = 10$ с, если при разгоне на ведущие колёса автомобиля приходится половина его веса?

Решение. Разгон машины осуществляет сила трения, действующая на ведущие колёса автомобиля. В отсутствие проскальзывания это сила трения покоя, которая не может превышать значения

$$F = kN = \frac{kMg}{2}.$$

Здесь $N = Mg / 2$ — сила реакции опоры, которая действует на ведущие колеса и составляет (по условию) половину веса автомобиля. Эта сила сообщает автомобилю ускорение $a = F / M = kg / 2$. Двигаясь с таким ускорением, автомобиль за время t мог бы набрать скорость $v = at = kgt / 2 = 40$ м/с, если бы не одно «но»! Разгоняя автомобиль, сила трения совершает работу. Энергию для этого даёт двигатель, мощность которого не превышает $P = 100$ кВт. В то же время потребляемая автомобилем мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt} = Fv = \frac{kMg}{2}\frac{kgt}{2} = \frac{Mk^2g^2t}{4},$$

что к концу десятой секунды составляет 128 кВт. Но двигатель такую мощность дать не может. Следовательно, разгон в таком режиме (с максимальной силой трения) возможен только до момента времени t_1, определяемого соотношением

$$t_1 = \frac{4P}{Mk^2g^2} = 7{,}91 \text{ с}.$$

К этому моменту машина наберёт скорость

$$v_1 = \frac{2P}{Mkg} = 31{,}25 \text{ м/с}.$$

Дальнейший разгон будет происходить с потреблением мощности P. То есть за оставшееся время $t_2 = t - t_1$ машина сможет увеличить свою кинетическую энергию не более чем до величины

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{Mv_1^2}{2} + P\left(t - t_1\right).$$

Отсюда находим максимальную скорость, которую может набрать автомобиль за время t:

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{M} - \frac{4P^2}{(Mkg)^2}} = 39\,\text{м/с} = 140\ \text{км/ч}.$$

11.5. Заклинивание

С силой трения связан такой эффект, как **заклинивание**. Эффект этот заключается в следующем. Пусть мы пытаемся сдвинуть какое-то тело, прикладывая к нему некоторую сдвигающую силу. Это приведёт к возникновению силы трения покоя между этим телом и поверхностью. Если одновременно с ростом силы трения покоя будет расти и сила реакции, то это вызовет ещё больший рост силы трения и покой тела при любых сдвигающих силах. Посмотрите, например, на две тележки, показанные на рисунке 11.3. И на ту и на другую тележку опирается сверху массивный стержень. Какую из тележек легче вытащить горизонтальной силой?

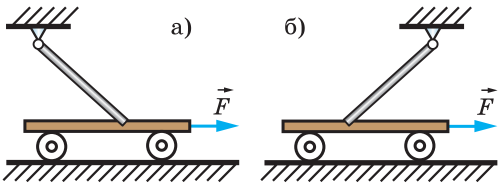


Рис. 11.3

Очевидно, что если бы трения не было, стержни никак не смогли бы повлиять на горизонтальное движение тележек. А вот если трение есть, то стержни будут влиять на движение тележек, причём по-разному. Чтобы понять, как осуществляется такое влияние, заметим, что сила трения действует парой — на тележку со стороны стержня и на стержень со стороны тележки, причём по третьему закону Ньютона эти силы равны по величине и противоположны по направлению. И для той и для другой тележки эта сила препятствует движению. А вот на стержень она действует по-разному. Стержень, показанный на левом рисунке, эта сила отклоняет вправо, уменьшая силу реакции, а следовательно, и саму себя. Стержень на правом рисунке сила трения ставит враспор между потолком и тележкой, увеличивая силу реакции, а следовательно, саму себя. И для достаточно большого коэффициента трения между стержнем и тележкой может возникнуть такой эффект, когда тележку мы не сможем сдвинуть никакой силой. Такой эффект и называется заклиниванием.

Увеличение силы трения (без доведения ситуации до заклинивания) используется в автомобильных тормозах. На рисунке 11.4 показаны две схемы расположения

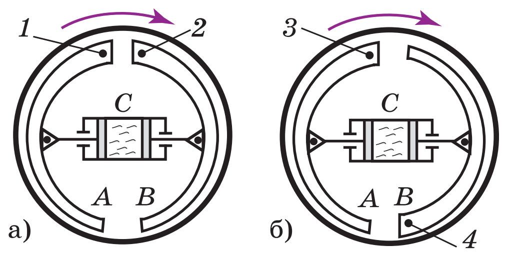


Рис. 11.4

барабанного тормоза автомобиля. Принцип работы тормоза заключается в следующем. На оси колёс надеты цилиндрические барабаны, вращающиеся вместе с колёсами. К торцевым стенкам барабана (которые вместе с барабаном не вращаются) прикреплены две тормозные колодки *A* и *B* (в точках *1*, *2*, *3* и *4*). При нажатии на педаль тормоза возрастает давление жидкости в тормозных цилиндрах *C*, колодки прижимаются к внутренней поверхности барабана и тормозят его благодаря трению. Какая система — показанная на левом или правом рисунке — тормозит более эффективно? Направление вращения барабана показано стрелкой.

При торможении на барабан со стороны колодок и (по третьему закону Ньютона) со стороны барабана на колодки действуют силы трения. Силы трения, действующие на тормозные колодки со стороны барабана, показаны на рисунке (на барабан силы действуют в противоположном направлении).

Для левого барабана силы трения, действующие на колодки, создают моменты, стремящиеся развернуть их относительно точек крепления по часовой стрелке. Это приводит к увеличению силы реакции между барабаном и левой колодкой и к уменьшению силы реакции между барабаном и правой колодкой. Следовательно, сила трения между барабаном и левой колодкой при торможении возрастает, между барабаном и правой колодкой убывает. То есть для левой колодки возникает эффект увеличения силы трения при торможении, для правой нет.

При торможении с помощью барабана, приведённого на правом рисунке в условии задачи, силы трения увеличиваются для обеих тормозных колодок. Это значит, что торможение правым барабаном более эффективно.

11.6. Лыжная мазь

Зимой вам, наверное, приходилось кататься на лыжах. Бывает, что лыжи совсем не скользят, а бывает, проскальзывают или испытывают отдачу. И в этот момент думаешь — эх, надо было их мазью… А что делает лыжная мазь — увеличивает или уменьшает трение? Давайте разберёмся.

Пусть лыжник едет попеременным ходом (не коньковым), не используя палки. Как направлена сила трения, действующая на лыжи со стороны снега, и как она меняется в процессе движения лыжника? Как должны работать лыжные мази для обеспечения эффективного движения лыжника? Они должны уменьшать или увеличивать трение между лыжей и снегом? На какие части лыжи эффективнее наносить мази?

В процессе движения лыжника каждая лыжа выполняет две функции — отталкивания и скольжения. Когда лыжник хочет оттолкнуться, он ведёт ногу

назад, добиваясь того, что лыжа останавливается относительно снега, и отталкивается от снега, используя силу трения покоя. В этот момент сила трения направлена вперёд по ходу движения лыжника. Когда лыжа скользит по снегу, сила трения направлена противоположно скорости скольжения лыжи, т. е. назад.

Лыжные мази должны работать двояко: увеличивать трение при отталкивании (в противном случае лыжник не сможет оттолкнуться — лыжи будут проскальзывать) и уменьшать трение при скольжении. А это возможно? Да!

Ведь при отталкивании работает трение покоя, а при скольжении — трение скольжения, а коэффициенты трения покоя и скольжения несколько различаются (первый всегда больше), поэтому в качестве лыжных мазей и используют вещества с большой разницей этих коэффициентов.

В действительности для лыж используются мази двух типов — «для держания» и «для скольжения». Вторые просто понижают трение как только возможно. А вот мази держания — это вещества с существенно различающимися трением покоя и трением скольжения. В момент толчка (в покое) мазь как бы прилипает к снегу, позволяя эффективно оттолкнуться, в момент скольжения коэффициент трения уменьшается, и мазь держания не тормозит скольжение лыжи.

Расположение мазей держания и скольжения на лыже также различно и определяется распределением силы реакции в момент толчка и скольжения. Правильно подобранные лыжи не должны касаться снега участком, расположенным под ботинком, при опоре на две ноги. При переносе всего веса на одну лыжу должен возникать контакт между этой областью и снегом. Поэтому мази держания наносят на участок лыжи под ботинком (на профессиональном жаргоне — «под пятку»), мази скольжения — на концы лыж.

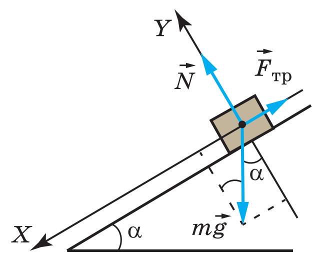
11.7. Измеряем коэффициент трения

Существует несколько способов измерения коэффициента трения, когда так или иначе отмечается начало скольжения тела по поверхности.

Задача 11.3. Дано: деревянный брусок в форме прямоугольного параллелепипеда, длинная деревянная линейка, лабораторный штатив с лапкой, транспортир, нитка с грузом. Определите коэффициент трения между бруском и линейкой. Оцените погрешность измерений. При проведении измерений можно использовать только это оборудование.

Решение. Докажем, что коэффициент трения между телом и поверхностью равен тангенсу угла наклона этой поверхности в момент начала соскальзывания тела. Действительно, пока тело покоится на плоскости, выполнено условие

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0, \qquad (*)$$



где $m\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}$ — сила реакции поверхности, $\vec{F}_{\text{тр}}$ — сила трения (см. рисунок). Проецируя уравнение (*) на ось OX, направленную вниз вдоль плоскости, и ось OY, направленную перпендикулярно, получим

$$F_{\text{тр}} = mg\sin\alpha, \qquad N = mg\cos\alpha. \qquad (**)$$

При увеличении угла наклона плоскости сдвигающая сила $mg\sin\alpha$ будет расти, а максимальная сила трения покоя (kN) убывать. Поэтому при определённом угле наклона плоскости α_0 сдвигающая сила «побеждает» максимальную силу трения покоя, и тело начинает скользить по плоскости. Используя закон Кулона—Амонтона и формулы (**), найдём, что для угла α_0 наклона плоскости, при котором начнётся скольжение тела, справедливо уравнение

$$mg\sin\alpha_0 = kmg\cos\alpha_0,$$

откуда находим

$$k = \operatorname{tg}\alpha_0. \qquad (***)$$

Формула (***) и даёт метод измерения коэффициента трения. Надо закрепить линейку в лапке штатива и медленно поднимать её вверх, увеличивая угол наклона плоскости. Далее нужно найти такое положение плоскости, при котором брусок начнёт скользить, измерить угол наклона плоскости в этот момент (для этого использовать транспортир и нитку с грузом как отвес), вычислить его тангенс. Коэффициент трения нашего бруска об линейку оказался равным $k = 0{,}32$.

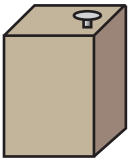
Погрешность измерений можно оценить так. Поймать начало скольжения бруска достаточно сложно, это возможно с погрешностью, не меньшей нескольких градусов: $\Delta\alpha = (2-3)°$. Это приводит к погрешности тангенса, которую можно оценить через его производную:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \Delta\alpha) = \operatorname{tg}\alpha \pm (\operatorname{tg}\alpha)'\Delta\alpha = \operatorname{tg}\alpha \pm \frac{1}{\cos^2\alpha}\Delta\alpha.$$

Поэтому окончательный результат измерения коэффициента трения с погрешностью оказывается

$$k = 0{,}32 \pm 0{,}05.$$

Измерение коэффициента трения по наклону плоскости в момент начала скольжения является одним из самых распространённых методов измерения, но далеко не единственным.

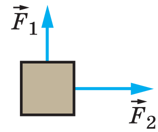


Задача 11.4. Дано: несимметричный деревянный брусок в форме прямоугольного параллелепипеда с утяжелителем с одной стороны (вкрученный в дерево винт), линейка, карандаш, лист бумаги. Определите коэффициент трения между бруском и бумагой, используя переворот бруска. Оцените погрешность измерений. При проведении измерений можно использовать только это оборудование.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Брусок соскальзывает с наклонной плоскости высотой 3 м и длиной 5 м. Чему равно ускорение бруска a, если коэффициент трения между бруском и плоскостью равен 0,5? Считайте, что $g = 10$ м/с^2.

11.2. Тело массой $m = 1$ кг аккуратно кладут на шероховатую горизонтальную поверхность и действуют на него двумя взаимно перпендикулярными горизонтальными силами $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (на рисунке показан вид сверху). Известно, что если $F_1 = 3$ Н и $F_2 = 4$ Н, то тело движется с очень малым ускорением. Чему равен коэффициент трения между телом и поверхностью? Считайте, что $g = 10$ м/с^2.



11.3. У края стола лежит цепочка. Цепочка начинает соскальзывать, если со стола свешивается шестая часть её длины. Чему равен коэффициент трения между цепочкой и столом?

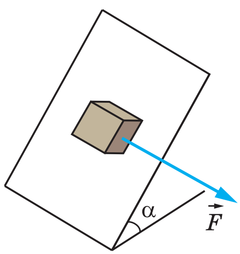
11.4. Покажите на рисунке силу, с которой наклонная плоскость действует на помещённое на неё тело, если:

а) тело покоится;

б) первоначально тело покоилось, но после полученного толчка соскальзывает, замедляясь, вниз по наклонной плоскости;

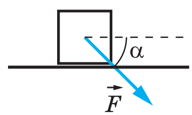
в) тело соскальзывает с наклонной плоскости с ускорением, направленным вниз вдоль плоскости;

г) первоначально тело покоилось, но после полученного толчка скользит, замедляясь, вверх по наклонной плоскости.



11.5. Тело массой m покоится на наклонной плоскости с углом наклона α (см. рисунок). Коэффициент трения между телом и плоскостью k. Какую минимальную горизонтальную силу, направленную вдоль плоскости, надо к нему приложить, чтобы тело начало двигаться?

11.6. На горизонтальную поверхность поместили брусок. Коэффициент трения между поверхностью и бруском k. К бруску прикладывают силу $\vec{F}$, направленную вниз под углом α (см. рисунок). При каких значениях α брусок будет оставаться неподвижным независимо от значения силы F?



11.7. На наклонной плоскости с углом наклона α находится тело. Коэффициент трения между телом и плоскостью равен k ($k > \operatorname{tg}\alpha$). Какой минимальной силой нужно действовать на тело, чтобы оно поднималось вверх по плоскости?

ГЛАВА 12

ФИЗИКА И МЕХАНИКА: ПРЕДЕЛЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Что ещё придумают физики

Два тысячелетия античной физики слабо повлияли на жизнь человечества (хотя античная физика и дала нам простые механизмы и картину мира), а вот современная физика за три века изменила нашу жизнь до неузнаваемости. И прикладная механика, создав необходимые человеку устройства и механизмы, внесла огромный вклад в эти изменения. Всего 200 лет назад существовало только два способа перемещения людей и грузов по суше из одной точки в другую — либо пешком, либо на лошади или на телеге. Сегодня мы перемещаемся на автомобилях по шоссейным дорогам, на поездах по железным дорогам и на самолётах вовсе без дорог, по воздуху.

Пять веков назад единственным способом совершения механической работы была мускульная сила человека или рабочего животного. Три-четыре века назад прикладная механика помогла человеку освоить энергию ветра и воды. Сегодня мы используем тепловые и электрические двигатели, химическую энергию разных видов топлива и даже энергию атомных ядер.

До середины XIX в. передать сообщение адресату, проживающему в другом городе, можно было единственным способом — написать письмо на бумаге и послать его с почтовой каретой, которая могла добираться до адресата и неделю, и месяц, и более... Сегодня мы обмениваемся электронными сообщениями и разговариваем по телефону с корреспондентами, живущими на другой стороне земного шара, что называется, в режиме реального времени...

Всё это стало возможным благодаря успехам физики в познании того, как устроена природа, благодаря достижениям прикладной механики, с помощью которой построено множество полезных устройств и механизмов.

О некоторых таких устройствах вы уже узнали из этого курса. Невольно возникают вопросы: а не исчерпаны ли до конца возможности физики и механики? Способны ли эти науки к получению новых знаний и созданию новых устройств? Смогут ли они удивить нас в будущем чем-то совершенно новым и исключительно полезным?

Но сначала давайте вспомним прогнозы прошлого. Вот что писал в книге «О суетности догм» **Джозеф Гленвилл (1636—1680)** — современник Ньютона, Гука, Гюйгенса. «Несомненно, развитие наук необычайно увеличит возможности человечества. В будущем нам станут доступны южные моря. Может быть, Луна станет столь же доступной, как Америка. Для наших потомков купить пару крыльев будет столь же естественным, как для нас пару башмаков. Станет возможным разговаривать с человеком, находящимся в Индии, как будто он стоит рядом в комнате, превращать пустыни в плодородные земли и, наконец, восстанавливать волосы».

Поразительно! Куда там писателям-фантастам! Ни одного неверного прогноза. Причём задачи расставлены почти в хронологическом порядке их решения, а последняя оказалась одной из самых сложных, но также в каком-то виде решаемой современной медициной. И ещё. Удивительно, как Гленвилл за 200 лет до открытия электромагнитных волн смог спрогнозировать возможность разговора людей, находящихся на больших расстояниях. Ну а что же дальше?

Завершая изложение курса «Прикладная механика», авторы этой книги хотели бы немного пофантазировать о том, над какими задачами будет работать прикладная механика в ближайшие десятилетия.

Простые и непростые механизмы...

Казалось бы, что все простые механизмы были изобретены ещё в древности. Да и базовые механические конструкции — велосипед, автомобиль, разного рода двигатели — тоже все уже созданы. Однако, например, недавнее изобретение таких совершенно новых и необычных средств передвижения, как сегвей (патент 2004 г.), гироскутер и моноколесо, показывает, что и здесь возможности для полёта фантазии ещё не исчерпаны!

Компьютеры и всё, всё, всё...

Ждём суперкомпьютеров, квантовых компьютеров, возможности которых превзойдут всё, что было сделано на Земле до сих пор. Будут расширяться возможности компьютерных сетей, Интернета, систем связи. Но это совсем другая история, не имеющая прямого отношения к науке, которую мы в настоящий момент представляем...

Нанотехнологии

Вы все, конечно, слышали о нанотехнологиях. В XXI в. о них много пишут и говорят. Но далеко не все понимают, о чём же конкретно идёт речь.

Под термином «нанотехнологии», как правило, понимают технологии, позволяющие создавать микроскопические структуры, размерами в доли, единицы или десятки нанометров, манипулируя буквально отдельными атомами и молекулами или по крайней мере их небольшими группами. Напомним, что типичный размер атома (или небольшой неорганической молекулы) — это как раз десятые доли нанометра. Нанотехнологии рассматриваются сегодня как перспективный метод создания новых материалов с заданными свойствами, а также как способ построения микроскопических структур и сложных макроскопических конструкций, как электронных, так и механических. Примером практической реализации нанотехнологий могут служить технологии производства графена, или углеродных нанотрубок, обладающих чрезвычайно высокой прочностью и уникальными электронными свойствами при весьма малых (микроскопических) размерах.

Новые материалы

Ещё совсем недавно и в строительстве, и в машиностроении применялись почти исключительно традиционные, известные людям с давних времён материалы: дерево, кирпич, бетон, немногочисленные металлы (чугун, сталь, медь, алюминий). В последние полвека ситуация начала быстро меняться. Сегодня промышленность использует огромное количество современных конструкционных материалов, разработанных на основе новых знаний, полученных физиками и химиками...

Новые материалы обеспечивают конструкциям повышенный уровень прочности, надёжности, экономичности и долговечности при сокращении затрат на их изготовление. Так, например, применение новых материалов позволило снизить среднюю массу легковых автомобилей, изготавливаемых в США, с 1840 кг в 1960 г. до 1100 кг в 2010 г. при одновременном снижении потребления топлива и повышении мощности двигателя, повышении безопасности, прочности, надёжности, долговечности и т. д. И это далеко не предел. Считается, что к середине XXI в. средняя масса автомобилей не будет превышать 750 кг, а расход топлива (для автомобилей, которые всё ещё будут использовать углеводородное топливо) сократится примерно до 3 л на 100 км пробега.

Лазерные технологии

Излучение лазеров будет использоваться всё чаще и всё многообразнее. И в целях коммуникации (оптоинформатика, фотонный компьютер, фотоника), и в промышленности (обработка металлов, создание новых материалов), и в медицине, где возможности лазерного луча поистине неограниченны), и в термоядерном синтезе (когда лазерному лучу удастся удерживать на чрезвычайно малых расстояниях дейтерий и тритий, заставляя их вступать в реакцию синтеза), и в управлении атомными, а может быть, даже ядерными процессами с помощью сверхмощных лазеров, за разработку которых была присуждена Нобелевская премия по физике 2018 г.

Ракетные и космические технологии

Есть надежда, что мы научимся делать плазменные космические двигатели, которые смогут развивать такие мощности, что будет реализована мечта человечества о межпланетных (а может быть, и межзвёздных) путешествиях...

Ожидается, что во второй половине XXI в. ведущие страны значительно увеличат вложения в развитие космических исследований и инфраструктуры. А это и новые космические транспортные системы, и новые типы стартовых площадок и систем запуска космических аппаратов, и создание на орбитах новых обитаемых станций с искусственной гравитацией, обеспечиваемой центробежной силой вращения... Всё это требует новых конструкционных идей и новых механических конструкций. Уж в космосе-то поле для деятельности прикладной механики поистине безгранично.

Новая, чистая энергетика и транспорт

Огромное внимание во всём мире в XXI в. привлекает развитие новых, экологически чистых форм производства энергии. Доля электроэнергии, вырабатываемой с использованием углеводородного топлива (газ, нефть, уголь), снизится к середине XXI в. с 70 до 40%. Оставшиеся 60% электроэнергии дадут нам атомная, солнечная, ветровая энергетика и гидроэнергетика. Это потребует создания новых, более экономичных и эффективных генераторов для всех форм чистой энергетики.

Революция должна произойти и в энергопотреблении. Ожидается значительный рост доли автомобилей, потребляющих вместо бензина более чистые электрическую энергию и (или) водородное топливо. Одна из главных проблем на этом пути — экономичность. Сегодняшние электромобили всё ещё достаточно дóроги по сравнению с обычными, бензиновыми. Создание новых мощных и экономичных двигателей на основе экологически чистых форм энергии — это серьёзный вызов для прикладной механики.

Новая инфраструктура

Переход на новую энергетику и новый, экологически более чистый транспорт потребует от человечества строительства новой инфраструктуры — линий электропередачи, сетей энергораспределения вдоль транспортных магистралей, новых дорог с новыми видами покрытий, тоннелей и мостов, которые обеспечат надёжную транспортную доступность всех регионов планеты. В разработке и создании строительных и механических конструкций для глобальных инфраструктурных проектов огромная роль обязательно будет принадлежать прикладной механике.

Авторы уверены: перспектива у прикладной механики в ближайшие десятилетия не просто есть — она огромна. И если вы ищете достойную сферу приложения своих сил, мы от души рекомендуем направить свою энергию и креативность именно на эту область деятельности. Уверены, что потраченные усилия не пройдут даром и вы будете удовлетворены результатами.

А как будет интересно!
Успехов вам!

Сергей Муравьёв и Андрей Ольчак

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. $L = \frac{9l}{4}$. **1.2.** $t = \sqrt{t_1 t_2}$. **1.3.** $t = \frac{2(n-1)S}{3v_0}$.

1.4. $\Delta t_1 = \sqrt{\frac{h}{2g}}$, $\Delta t_2 = \sqrt{\frac{h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{2g}}$, $\Delta t_3 = \sqrt{\frac{3h}{2g}} - \sqrt{\frac{h}{2g}}$, $\Delta t_4 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{3h}{2g}}$.

1.5. $N = mg\cos\alpha\sin\alpha$. N максимальна при $\alpha = 45°$. **1.6.** $T = 5000$ Н.

1.7. $v_1 = \frac{Mv - mu}{M + m} = 0{,}55$ м/с в сторону первоначального движения тележки.

1.8. $v_3 = v$. **1.9.** $v_2 = \frac{S_2 m_1}{S_1 m_2} v_1$. **1.10.** $A = 0$. **1.11.** $v = \sqrt{2g(l - l_1)}$.

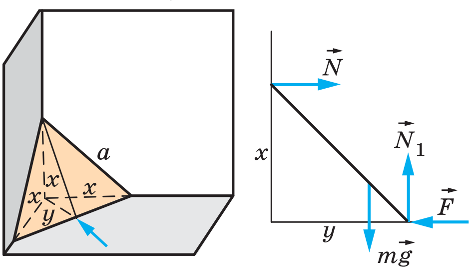
1.12. $\Delta h = \frac{2mg}{k} = 6$ см.

Глава 2

2.1. $mg/3$. **2.2.** $F = \frac{mga}{2h}$. **2.3.** $a_{\text{тела}} = \frac{4g}{3}$.

2.4. По окружности радиусом $l/2$. Значение ускорения середины стержня постоянно и равно $a = \omega^2 l/2$.

2.5. $F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}$.



Решение. Очевидно, что в данном положении пластинка взаимодействует с вертикальными стенками угла только в одной точке. Действительно, треугольник может касаться своими сторонами граней угла только в единственном положении; если сдвинуть треугольник вниз на бесконечно малую величину, контакт между стенками и сторонами треугольника пропадёт, и он будет опираться на ребро угла только своей вершиной. Следовательно, на треугольник действуют: две силы реакции — со стороны ребра и со стороны нижней грани угла, сила тяжести, приложенная к центру тяжести — точке пересечения медиан, искомая сила $\vec{F}$.

Геометрически очевидно (см. рисунок), что $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $y = \frac{a}{2}$.

Поэтому из условия моментов относительно середины нижней стороны треугольника (с учётом того, что точка пересечения медиан делит каждую медиану в соотношении 2 : 1) следует:

$$Nx = mg\frac{1}{3}y \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mg}{3\sqrt{2}}.$$

А поскольку $F = N$ (это следует из проекции условия сил на горизонтальную ось), то

$$F = \frac{mg}{3\sqrt{2}}.$$

2.6. Шары перевернут цилиндр, если его масса M удовлетворяет условию $M \leqslant \frac{m(2R-3r)}{R}$.

2.8. Груз движется вверх со скоростью $5v / 2$.

Глава 3

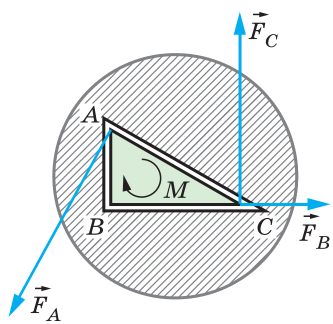
Задача 3.7. Масса груза, подвешенного к полиспасту, — 1 кг. Тройной полиспаст должен дать шестикратный выигрыш в силе, т. е. для удержания груза к верёвке нужно приложить силу 1,7 Н (что соответствует силе тяжести груза массой 0,17 кг). Показания динамометра составят чуть больше 2 Н, что объясняется наличием трения в реальной системе.

3.1. $M = \sqrt{m_1 m_2}$. **3.2.** $M = \Delta m\frac{L+2l}{l}$. **3.3.** $x = \frac{9l}{32}$.

3.4. Перевесит число 328 справа. Чтобы восстановить равновесие, на конец левого рычага нужно поместить груз с массой $m_{\text{доп}} = m$.

3.5. $F_{\text{лев}} = 24ma$, $F_{\text{прав}} = 28ma$.

3.6. ***Решение.*** Силы, с которыми стенки полости действуют на грани ключа, и точки их приложения показаны на рисунке. Из-за отсутствия трения эти силы перпендикулярны граням шлица и ключа. Поскольку сумма сил, действующих на ключ, равна нулю, а сумма двух сил, создающих момент M, также равна нулю (пара сил), должна быть равна нулю сумма $\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C$. Это значит, что эти силы образуют треугольник, подобный сечению ключа из-за перпендикулярности сил граням ключа. Из соотношений подобия заключаем, что



$$\frac{F_B}{F_C} = \frac{a}{b},$$

где a и $b = 3a / 2$ — катеты сечения ключа.

В то же время по условию моментов относительно вершины A

$$F_B a + F_C b = M.$$

Из этих двух уравнений находим силы F_B и F_C: $F_B = \dfrac{4M}{13a}$, $F_C = \dfrac{6M}{13a}$,

а затем по теореме Пифагора — силу F_A: $F_A = \dfrac{2M}{\sqrt{13}a}$.

Глава 4

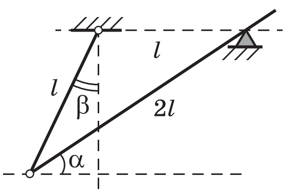
4.1. $N = mg\sqrt{1-(3/4)\cos^2\alpha}$. **4.2.** $N = mg\sqrt{1+(l/2h)^2}$. **4.3.** $\mathrm{tg}\,\alpha \geqslant \dfrac{1}{2k}$.

4.4. Стержень 6—9 сжат, его сила натяжения $F_{6-9} = \dfrac{\sqrt{5}F}{2} = 22{,}3$ кН. Стержень 1—2 также сжат, его сила натяжения $F_{1-2} = 2\sqrt{2}F = 56{,}6$ кН.

4.5. ***Решение.*** Проще всего положение равновесия системы стержней искать не из уравнений сил и моментов, а из условия минимума потенциальной энергии системы стержней.

Пусть угол наклона длинного стержня к горизонтали равен α. Из равнобедренности треугольника, образованного стержнями и отрезком, соединяющим шарнир и опору, следует, что угол наклона короткого стержня к вертикали равен

$$\beta = \frac{\pi}{2} - 2\alpha.$$



Потенциальную энергию системы стержней найдём как сумму потенциальных энергий стержней, а последние — как потенциальные энергии материальных точек массой m и $2m$, расположенных в центрах масс стержней (т. е. в середине каждого). Начало отсчёта потенциальной энергии выберем в точке шарнира, к которому подвешен короткий стержень. Тогда потенциальная энергия короткого стержня

$$\Pi_1 = -mg\frac{l}{2}\cos\beta = -mg\frac{l}{2}\sin 2\alpha.$$

Середина второго стержня находится ниже шарнира, к которому крепится короткий стержень, на расстоянии $l\cos\beta - l\cos\alpha$. Поэтому потенциальная энергия длинного стержня

$$\Pi_2 = -2mgl(\cos\beta - \cos\alpha) = -2mgl(\sin 2\alpha - \cos\alpha).$$

Отсюда находим потенциальную энергию системы стержней

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = -\frac{5}{2}mgl\sin 2\alpha + 2mgl\cos\alpha.$$

Для нахождения минимума потенциальной энергии дифференцируем и приравниваем производную к нулю:

$$\Pi' = -5mgl\cos 2\alpha - 2mgl\sin\alpha = 0.$$

Раскрывая косинус двойного угла и используя основное тригонометрическое тождество, получаем квадратное уравнение относительно $\sin\alpha$:

$$10\sin^2\alpha - 2\sin\alpha - 5 = 0.$$

Отсюда

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{51}}{10}\right)$$

(второй корень квадратного уравнения является отрицательным).

Глава 5

5.1. $\omega_2 = (r_1 / r_2)\omega_1,\ M_2 = (r_2 / r_1)M_1.$ **5.2.** $R = \dfrac{(n_1 + n_2)l}{2(n_1 - n_2)} = 28$ м.

5.3. Колёса сближаются с относительной скоростью $u = v/8$.

Глава 6

6.1. $\eta_1 = 0{,}75.$ **6.2.** $P = 700$ Вт. **6.3.** $\eta = 0{,}7.$

6.4. $A = 25$ Дж. **6.5.** $\eta = 0{,}077.$ **6.6.** $\eta = \dfrac{4n-1}{4n+3}.$

Глава 7

7.1. Рамка повернётся перпендикулярно вектору индукции магнитного поля. В показанном положении на рамку действует момент сил $M = IBS\cos\alpha$, где S — площадь рамки. Если изменить направление поля на противоположное, то рамка тоже повернётся перпендикулярно вектору индукции, но обратной стороной.

7.2. Индукционный ток возникнет. Направление — по часовой стрелке.

7.3. $F_{AC} = 0,\ F_{BC} = F_{AB}$ и направлена противоположно.

Глава 8

8.1. Не изменяется. **8.2.** $\Delta h = \dfrac{m}{\pi\rho\left(R_1^2 + R_2^3\right)}$; не зависит.

8.3. $T = \dfrac{m(k-n)}{n} = 3{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н.

8.4. ***Решение.*** Условие равновесия втулки в начальном положении $(m + M)g = (p + \rho g h)S_1$, где M — масса втулки, p — давление жидкости на поверхности (которое отлично от нуля, так как на поверхности жидкости лежит поршень), h — расстояние между нижними поверхностями втулки и поршня. Когда на втулку положили груз, втулка сместилась вниз. Пусть смещение втулки относительно земли равно Δx. Тогда втулка вытесняет дополнительное количество воды объёмом $\Delta x S_1$. Это приводит к поднятию поршня на расстояние Δx_1, которое можно найти из уравнения $\Delta x S_1 = \Delta x_1(S - S_1)$. Отсюда новое расстояние h_1 между нижними поверхностями поршня и втулки равно

$$h_1 = h + \Delta x + \Delta x_1 = h + \frac{\Delta x S}{S - S_1}.$$

Поэтому условие равновесия втулки с грузом имеет вид

$$(m + M)g = (p + \rho g h_1)S_1 = \left(p + \rho g h + \frac{\rho g \Delta x S}{S - S_1}\right)S_1. \qquad (*)$$

Подставляя в формулу (*) массу втулки из условия её равновесия без груза, получим

$$mg = \frac{\rho g \Delta x S S_1}{S - S_1}.$$

Отсюда находим

$$\Delta x = \frac{m(S - S_1)}{\rho S S_1}.$$

8.5. ***Решение.*** Найдём сначала давление смеси масла и воды до разделения растворов. Объёмы масла и воды по условию одинаковы. Поэтому плотность смеси определяется соотношением

$$\rho_{\text{см}} = \frac{\rho V + \rho_0 V}{2V} = \frac{\rho + \rho_0}{2}.$$

Смесь занимает всю нижнюю часть сосуда и 2/3 объёма узкой части. Поэтому если сечение верхней части сосуда равно S, то давление смеси около дна сосуда равно

$$p = \frac{\rho + \rho_0}{2} g \frac{4V}{30S} + \frac{\rho + \rho_0}{2} g \frac{2V}{3S} = \frac{2}{5}\frac{(\rho + \rho_0)gV}{S}.$$

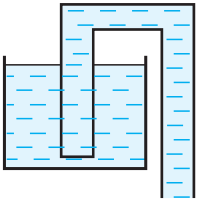
После отстаивания раствора вода опустится вниз, масло поднимется вверх. Поэтому нижняя часть сосуда будет заполнена водой объёмом V и одной третьей объёма имеющегося масла — $V / 3$. Верхняя часть сосуда будет содержать две третьих имеющегося объёма масла — $2V / 3$. Поэтому давление смеси после отстаивания можно записать так:

$$p_1 = \rho g \frac{V}{10S} + \rho_0 g \frac{V/3}{10S} + \rho_0 g \frac{2V/3}{S} = \frac{(\rho + 7\rho_0)}{10}\frac{gV}{S}.$$

Следовательно, отношение конечного и начального давлений

$$\frac{p_1}{p} = \frac{\rho + 7\rho_0}{4(\rho + \rho_0)} = 0{,}96.$$

Таким образом, давление раствора на дно сосуда в конце процесса будет составлять 0,96 от начального.



8.6. Основная идея работы сифона заключается в следующем. Пусть имеется изогнутая трубка с коленами разной длины, одно из которых (короткое) помещено в сосуд с водой, другое находится вне сосуда. И пусть мы каким-то образом заполнили трубку водой без разрывов (см. рисунок). Что будет дальше? Очевидно, атмосферное давление не даст разорваться воде в трубке (другими словами, образоваться в ней пустому пространству). Это значит, что вода в трубке будет вести себя как единое целое. А поскольку вода в длинном колене трубки тяжелее воды в коротком, вода в трубке начнёт двигаться в направлении длинного колена. А значит, вода в сосуде будет засасываться в трубку и вытекать через длинное колено трубки. Очевидно, этот процесс закончится тогда, когда вся вода вытечет из сосуда (или, точнее, когда уровень воды в сосуде опустится ниже конца трубки).

Похожий процесс происходит и в двойном сифоне Герона, о котором говорится в условии задачи. Когда в сосуд наливают воду, она, подтекая под край внешней трубки, заполняет её. При этом воздух выходит через отверстие и мешает воде. Дойдя до верхнего края внутренней трубки, вода начинает вытекать через неё. И если в сосуд в этот момент продолжают наливать воду, эта вода полностью заполняет трубку, и мы получаем сифон, длинной трубкой которого является внутренняя трубка, короткой — пространство между трубками в сосуде. А это значит, что вся вода вытечет через трубку из сосуда.

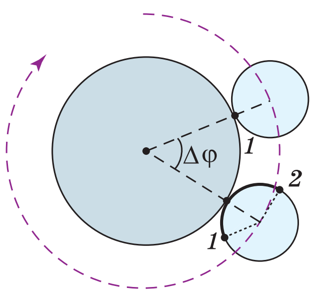
Глава 9

9.1. 9 м/с^2.

9.2. Ускорение автомобиля максимально в точке 3.

9.3. $t = \dfrac{\pi\left(r_2^2 - r_1^2\right)}{dv} =$ 3800 с = 63 мин. Если бы катушка вращалась с постоянной угловой скоростью, равной средней угловой скорости, на перемотку было бы затрачено такое же время.

9.4. ***Решение.*** Рассмотрим движение малого диска сначала по внешней поверхности большого диска. Пусть малый диск повернулся на угол $\Delta\varphi$ вокруг большого (см. рисунок). Если бы малый диск не вращался вокруг своей оси (для этого он должен был бы, конечно, проскальзывать по большому), то его радиус, связывающий точку, которой он касался большого диска, с его центром, остался бы параллельным самому себе (эта точка отмечена на рисунке цифрой *1*). И, следовательно, угол между отрезком, связывающим центры дисков, и направлением на эту точку был бы равен $\Delta\varphi$. Из-за отсутствия проскальзывания рассматриваемая точка вращается по часовой стрелке и окажется в положении *2*, причём



из-за отсутствия проскальзывания длина дуги, связывающей точку *2* и точку касания дисков, будет равна длине дуги большого диска между точками касания малого диска в начальном и конечном положении, т. е. $2R\Delta\varphi$. Таким образом, длина дуги между точками *1* и *2* равна $R\Delta\varphi + 2R\Delta\varphi = 3R\Delta\varphi$, и, следовательно, малый диск повернётся на угол $3\Delta\varphi$ вокруг своей оси. А значит, число оборотов малого диска вокруг своей оси будет равно

$$n = \frac{3\Delta\varphi}{2\pi}.$$

Аналогично рассматривается движение малого диска по внутренней поверхности большого. Однако углы его поворота вокруг большого и своей оси будут вычитаться (а не складываться, как в первом случае), поэтому при повороте малого диска вокруг большого на угол $\Delta\varphi$ он совершит

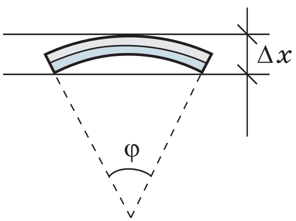
$$n_1 = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}$$

оборотов вокруг своей оси.

Глава 10

10.1. $h = \dfrac{\sigma_0}{\rho g} \approx 10$ км. Это масштаб высоты самых высоких гор на Земле. Относительная деформация гранита составляет огромную для хрупкого материала величину $0{,}5 \cdot 10^{-2}$. Это означает, что гранит разрушается при таких силах сжатия, когда каждый его метр сжимается примерно на 5 мм.

10.2. $\Delta x = \dfrac{Fh}{\pi r^2 G} = 1{,}7 \cdot 10^{-3}$ мм.



10.3. ***Решение.*** Из-за разных коэффициентов теплового расширения пластины двух металлов по-разному удлиняются при нагревании (или сжимаются при охлаждении). А поскольку они спаяны по всей площади контакта, пластине выгоднее согнуться, чем растягивать один и сжимать другой металл. Найдём радиус изгиба. Пусть пластина нагрелась на ΔT. Тогда пластинки, из которых она состоит, удлинятся на

$$\Delta l_1 = \alpha_1 \Delta T l_0 \text{ и } \Delta l_2 = \alpha_2 \Delta T l_0,$$

где l_0 — первоначальная длина пластинок. Следовательно, для угла φ, на который опирается пластина после изгиба, можно записать (с учётом малой толщины пластины):

$$\varphi = \frac{l + \Delta l_1}{R} = \frac{l + \Delta l_2}{R + \Delta h}.$$

Отсюда, пренебрегая произведением двух малых величин, получаем:

$$R = \frac{l\Delta h}{\Delta l_2 - \Delta l_1} = \frac{\Delta h}{(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}.$$

Прогиб пластины (величина Δx на рисунке) можно найти как

$$\Delta x = R - R\cos(\varphi/2) = 2R\sin^2(\varphi/4). \qquad (*)$$

Для малых углов $\sin\varphi \approx \varphi$, и из формулы (*) следует

$$\Delta x = \frac{l^2}{8R} = \frac{l^2(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{8\Delta h} \approx 2 \text{ мм}.$$

Удлинение пластины составит $\alpha l \Delta T \approx 2\cdot 10^{-1}$ мм, т. е. на порядок меньше.

10.4. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{11l}}$.

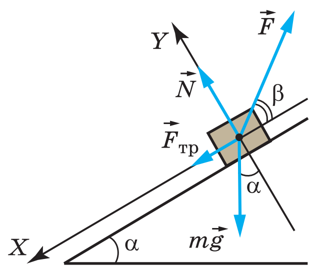
10.5, 10.6. Колебания системы будут представлять собой так называемые биения, когда будет колебаться то одно тело, то другое.

Глава 11

11.1. $a = 2$ м/с^2. **11.2.** $k = 0{,}5$. **11.3.** $k = 0{,}2$.

11.5. $F = mg\sqrt{k^2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$. **11.6.** $\alpha \leqslant \operatorname{arctg}(1/k)$.

11.7. ***Решение.*** Приложим к телу сдвигающую силу $\vec{F}$, направленную под углом β к плоскости, и исследуем её в зависимости от угла β. Силы, действующие на тело, показаны на рисунке. Очевидно, тело сдвинется, если $F\cos\beta > mg\sin\alpha + F_{\text{тр}}$. Поскольку $F_{\text{тр}} = k(mg\cos\alpha - F\sin\beta)$, то тело сдвинется, если



$$F > \frac{mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{\cos\beta + k\sin\beta}. \qquad (*)$$

Чтобы сила F как функция угла β была минимальна, знаменатель формулы (*) должен быть максимален. Найдём максимум знаменателя, дифференцируя его по β и приравнивая производную к нулю, затем определим, что сдвигающая сила будет минимальна при $\beta = \operatorname{arctg} k$ и равна

$$F_{\min} = \frac{mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{\sqrt{1+k^2}},$$

что меньше, чем сдвигающая сила, параллельная плоскости.

ПРИЛОЖЕНИЕ

УЧЕБНЫЕ ПРОЕКТНЫЕ РАБОТЫ

Старая инженерная мудрость гласит: хочешь разобраться, как работает механизм, — разбери его на детали, снова собери своими руками и добейся того, чтобы он заработал. В процессе сборки-разборки, возможно, удастся сообразить, как этот механизм усовершенствовать. Той же цели может послужить и выполнение проектных работ, например при изучении прикладной механики. Темы для проектов может предложить учитель, а учащиеся могут выбрать для себя такой проект, которым им интересно будет заниматься. Ниже предлагаем несколько примерных тем проектов. Каждый проект может выполняться в течение нескольких месяцев группой учащихся под руководством учителя. Выполнение проектной работы не обязательно приведёт вас к успеху. Исследование явления или конструирование машины могут быть очень сложными: может оказаться не просто найти или изготовить все необходимые детали и оборудование, сконструированная машина может не заработать как надо, однако в любом случае вы получите бесценный опыт практической инженерной работы и приобретёте дополнительные полезные знания.

Мы предлагаем только возможные темы проектов и только самые общие советы о том, как их можно выполнить. Каждая исследовательская группа вправе идти своим путём. В любом случае желаем вам максимального успеха!

ПРИМЕРНЫЕ ТЕМЫ ПРОЕКТНЫХ РАБОТ

1. Разработка универсального метода (или группы методов) определения положения центра тяжести плоской фигуры неправильной формы

Задача. Разработайте максимально универсальный метод (или несколько взаимодополняющих методов) определения положения центра тяжести плоских фигур неправильной формы. Предложите способ, как найти область погрешности определения центра тяжести. Попробуйте, например, используя наклеенную на картон карту России, с помощью разработанных методов определить положение «географического центра» нашей страны (предполагая, что он совпадает с точкой на карте, соответствующей центру тяжести этой карты на листе картона). Найдите область погрешности для положения искомой центральной точки.

2. Конструирование и сборка установки для исследования движения тел, соскальзывающих или скатывающихся по наклонной плоскости с разными углами наклона. Исследование физических характеристик процессов соскальзывания и скатывания тел разной формы

Задача. Сконструируйте установку с наклонной плоскостью достаточной длины и ширины, чтобы можно было провести исследование, с возможностью изменять контролируемым образом угол наклона этой плоскости. Проведите исследование зависимости от угла наклона времени движения разных тел от верхней точки плоскости до её нижней точки. Предложите способ измерения и/или вычисления скорости движения тела в нижней точке. Рассмотрите разные случаи: соскальзывание брусков разного размера, скатывание тел цилиндрической или шарообразной формы. Сделайте выводы о полученных в результате измерений закономерностях. Проверьте, в каких случаях выполняется закон Кулона—Амонтона ($F_{тр} = kN$). Сравните полученные результаты с теоретическими расчётами.

3. Конструирование и сборка действующей подъёмной системы соединённых блоков (полиспаста) с теоретическим выигрышем в силе в определённое, заданное учителем нечётное число раз (например, в 7 раз или в 13 раз)

Задача. Сконструируйте полиспаст, дающий выигрыш в силе в заданное число раз. Постройте и испытайте устройство практически. Если реальный выигрыш в силе не достигает ожидаемого теоретического значения, постарайтесь объяснить, почему. Предложите возможные методы усовершенствования построенной установки с целью доведения выигрыша в силе до теоретически возможного значения.

ПОДСКАЗКА. В главе 3 есть задача 3.5, в которой подробно разобрана конструкция полиспаста, рассчитанного на выигрыш в силе, равный 5. Изучите её внимательно и попробуйте рассуждать по аналогии. Имейте в виду, что для разных коэффициентов выигрыша в силе соединения и комбинации блоков могут существенно различаться.

4. Конструирование и сборка действующей подъёмной системы, дающей максимальный выигрыш в силе

Задача. Сконструируйте механическую систему, состоящую из блоков, рычагов, шестерёнок и подобных простых механизмов, которая давала бы самый большой, насколько возможно, выигрыш в силе. Постройте и испытайте эту систему практически. Измерьте реальный выигрыш в силе и оцените его отличие от теоретически возможного для этой конструкции.

5. Конструирование комнатной системы автоматического полива растений

Задача. Сконструируйте и постройте систему, позволяющую стабильно подавать воду, например для полива комнатного растения из большой ёмкости с водой, расположенной на удобном расстоянии от растения. Проведите испытание и оптимизацию работы системы с целью добиться требуемого расхода воды.

ПОДСКАЗКА. Работа сифонных систем, в которых вода может самопроизвольно подниматься вверх, подробно описана в главе 8 этой книги.

6. Конструирование маятника Максвелла и исследование его колебаний

Задача. Сконструируйте и постройте маятник Максвелла. Исследуйте зависимость периода его колебаний от параметров маятника (длины нитей, наматываемых на ось вращающегося массивного тела, массы и диаметра вращающегося диска).

ЛИТЕРАТУРА

1. Физический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1983.

2. **Карцев В. П.** Ньютон / В. П. Карцев. — М.: Молодая гвардия, 1987. — 416 с. — (Жизнь замечательных людей).

3. **Кобзарев И. Ю.** Ньютон и его время / И. Ю. Кобзарев. — М.: Знание, 1978. — 63 с.

4. **Ньютон И.** Математические начала натуральной философии / И. Ньютон; пер. с лат. и коммент. А. Н. Крылова. — М.: Наука, 1989. — 711 с.

5. **Чечёткина И. И.** Философия науки нового времени / И. И. Чечёткина. — Казань: Издательство КНИТУ, 2013. — 184 с.

6. **Мэрион Дж. Б.** Физика и физический мир / Дж. Б. Мэрион. — М.: Мир, 1975. — 628 с.

7. **Горбачёв В. В.** Концепции современного естествознания / В. В. Горбачёв. — М.: ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. — 592 с.

8. **Баврин И. И.** Сборник задач и занимательных упражнений по математике. 5—9 классы / И. И. Баврин. — М.: Владос, 2013. — 236 с.

9. **Галилей Г.** Механика // Галилей Г. Избранные труды. В 2 т. — М.: Наука, 1964. — Т. 2. — 596 с.

10. **Стеклов В. А.** Галилео Галилей. Избранные труды. В 2 т. — М.: Наука, 1964. — Т. 2. — 596 с.

11. **Витрувий М. П.** Десять книг об архитектуре / А. Т. Григорян — М.: Наука, 1974. — 482 с.).

12. **Плутарх.** Сравнительные жизнеописания. В 2 т. / Плутарх. — М.: Наука, 1994.

13. Архимед. Сочинения/ пер. и вступ. И. Н. Веселовского. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962.

14. https://ru.wikipedia.org/wiki/Колесо.

15. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2238889

16. **Зоммерфельд А.** Механика / А. Зоммерфельд.— М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. — 393 с.

17. **Грифель А.** «Эволюция» Дарвина / А. Грифель // Наука и жизнь. — 2001. — № 3.

18. **Мякишев Г. Я.** Физика. 11 класс / Г. Я. Мякишев, Б. Б. Буховцев, В. М. Чаругин; под ред. Н. А. Парфентьевой. — М.: Просвещение, 2014. — 416 с.

19. **Павленко Ю. Г.** Начала физики / Ю. Г. Павленко. — М.: Экзамен, 2005.

20. **Калашников Н. П.** Начала физики / Н. П. Калашников, С. Е. Муравьёв. — Смоленск: Ойкумена, 2013. — 603 с.

21. **Фарадей М.** История свечи / М. Фарадей. — М.: Наука, 1980. — 128 с.

22. **Веселовский О. Н.** Очерки по истории электротехники / О. Н. Веселовский, Я. А. Шнейберг. — М.: Издательство МЭИ, 1993. — 252 с.

23. **Галилей Г.** Рассуждения о телах, пребывающих в воде, и о тех, которые в ней движутся // Галилей. Г. Избранные труды. В 2 т. — М.: Наука, 1964. — Т. 2. — 596 с.

24. https://ru.wikipedia.org/wiki/Список_лауреатов_Нобелевской_премии_по_физике

25. **Фейнман Р.** Фейнмановские лекции по физике. В 7 т. / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. — М.: Мир, 1977. — Т. 1. — 267 с.

26. **Асламазов Л. Г.** Задачи и не только по физике / Л. Г. Асламазов, И. Ш. Слободецкий. — М.: Бюро Квантум, 2005. — 288 с.

27. **Бутиков Е. И.** Физика в примерах и задачах / Е. И. Бутиков, А. А. Быков, А. С. Кондратьев. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

28. **Зильберман А. Р.** Задачи для физиков / А. Р. Зильберман, Е. Л. Сурков. — М.: Знание, 1971. — 32 с.

29. **Попов А. И.** Теоретическая механика. Сб. задач для творческого саморазвития личности студента / А. И. Попов. — Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2010. — 188 с.

30. **Попов В. И.** Сборник олимпиадных задач по теоретической механике / В. И. Попов и др. — Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2006. — 96 с.

31. Инженерная олимпиада школьников: идеи, задачи, решения / под ред. С. Е. Муравьева. — М.: Изд-во НИЯУ МИФИ, 2016. — 128 с.

32. **Муравьёв С. Е.** Инженерная олимпиада школьников / С. Е. Муравьёв, В. И. Скрытный. — М.: Изд-во НИЯУ МИФИ, 2018. — 124 с.

33. **Вараксина Е. И.** Учебные проекты по школьному физическому эксперименту. 7 класс / Е. И. Вараксина, В. В. Майер. — М.: Флинта, 2019. — 172 с.

34. **Майер В. В.** Импульсный метод измерения скорости звука / В. В. Майер, Е. И. Вараксина // Потенциал. — 2014. — № 11. — С. 65.

35. Всероссийский конкурс научных работ школьников «Юниор-2017». 3—5 февраля 2017 г. — М.: Изд-во НИЯУ МИФИ, 2017.

36. XVII Школьные Харитоновские чтения. Сб. тезисов. — Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2017.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Серия «Профильная школа»

Ольчак Андрей Станиславович
Муравьев Сергей Евгеньевич

Прикладная механика
10—11 классы
Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Редакция физики
Заведующий редакцией *В. В. Жумаев*
Ответственный за выпуск *Н. В. Мелешко*
Редактор *Н. В. Мелешко*
Компьютерная графика *И. В. Губиной, К. С. Кергелен*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Техническое редактирование и компьютерная вёрстка *О. В. Сиротиной*
Корректоры *Е. В. Барановская, И. А. Григалашвили, Н. А. Ерохина, Н. А. Смирнова*

Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать .
Формат 70×90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура SchoolBookCSanPin.
Уч.-изд. л. 12,62. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Серия обеспечивает поддержку успешного профильного обучения и профессионального самоопределения старшеклассников.

Пособия серии могут использоваться при реализации учебного плана технологического, естественно-научного, социально-экономического, гуманитарного, универсального и других профилей на уровне среднего общего образования.

- Разработаны научными сотрудниками вузов совместно с учителями-практиками, имеющими опыт работы в профильных классах.
- Обеспечивают осознанное вовлечение обучающихся в изучение профильных учебных предметов.
- Знакомят старшеклассников со спецификой видов деятельности, которые будут для них ведущими с точки зрения профессиональной перспективы.
- Помогают в построении индивидуальной образовательной траектории, в вопросах выбора будущей профессии.

ISBN 978-5-09-084743-8

В серии «ПРОФИЛЬНАЯ ШКОЛА»:

- Сборник примерных рабочих программ. Элективные курсы для профильной школы
- Экологическая безопасность. Школьный экологический мониторинг. Практикум
- Медицинская статистика
- Физическая химия
- Биохимия
- Биотехнология
- Основы нанотехнологий
- Ядерная физика
- Прикладная механика
- Основы системного анализа
- Математическое моделирование
- Индивидуальный проект
- Оказание первой помощи
- Основы практической медицины
- Основы фармакологии
- Основы компьютерной анимации
- Латинский язык для медицинских классов
- Финансовая грамотность. Цифровой мир*
- Интернет-предпринимательство*

*Можно использовать вариативно: как элективный профильный курс и во внеурочной деятельности.

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
www.prosv.ru